ARCHIVE

for

RATIONAL MECHANICS

and

ANALYSIS

Edited by

C. TRUESDELL

Volume 7, Number 3

SPRINGER-VERLAG
BERLIN - GÖTTINGEN - HEIDELBERG
(Postverlagsort Berlin · 27.3.1961)

Mechanicam vero duplicem Veteres constituerunt: Rationalem *quae per Demonstrationes accurate procedit, & Practicam. Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utique* Mechanica *nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* Geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus.* NEWTON

La généralité que j'embrasse, au lieu d'éblouïr nos lumieres, nous découvrira plutôt les véritables loix de la Nature dans tout leur éclat, & on y trouvera des raisons encore plus fortes, d'en admirer la beauté & la simplicité. EULER

... ut proinde his paucis consideratis tota haec materia redacta sit ad puram Geometriam, quod in physicis & mechanicis unice desideratum. LEIBNIZ

The ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS nourishes the discipline of mechanics as a deductive, mathematical science in the classical tradition and promotes pure analysis, particularly in contexts of application. Its purpose is to give rapid and full publication to researches of exceptional moment, depth, and permanence.

Each memoir must meet a standard of rigor set by the best work in its field. Contributions must consist largely in original research; on occasion, an expository paper may be invited.

English, French, German, Italian, and Latin are the languages of the Archive. Authors are urged to write clearly and well, avoiding an excessively condensed or crabbed style.

Manuscripts intended for the Archive should be submitted to an appropriate member of the Editorial Board.

The ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS appears in numbers struck off as the material reaches the press; five numbers constitute a volume. Subscriptions may be entered through any agent. The price is DM 96.— per volume.

For each paper 75 offprints are provided free of charge.

Étude des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre dans un domaine illimité et quelques propriétés de leurs dérivées

J. Wolska-Bochenek

Communicated by R. Finn

1. Introduction

Dans le travail [7] nous avons étudié l'équation aux dérivées partielles

$$\nu \Delta \Delta \psi(A,t) - \frac{\partial \Delta \psi(A,t)}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

ν étant un paramètre, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ désignant l'opérateur de Laplace, connue dans l'hydrodynamique d'un liquide visqueux. En s'appuyant sur la solution fondamentale bien connue

$$\omega(A,t;B,\tau) = \int\limits_{\frac{r_{AB}}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}}}^{\infty} \frac{e^{-q^2}}{q}\, dq \tag{2}$$

nous avons étudié les intégrales de l'équation (1) analogues aux potentiels de charge plane et de simple couche relativement à l'équation de chaleur dans un domaine borné.

Dans le travail [7] nous avons profité des résultats récents de W. Pogorzelski [1], [2], [3], [4], et du travail de J. Schauder [6].

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier les propriétés du potentiel de charge plane relativement à l'équation (1) dans un domaine non-borné, les propriétés du potentiel de double couche relativement à l'équation (1), de même que les propriétés des dérivées de ces potentiels, et quelques nouvelles propriétés du potentiel de simple couche.

Comme résultat de nos études, nous allons obtenir quelques nouvelles propriétés du potentiel de simple et de double couche relativement à l'équation de chaleur, dont les plus importantes seront les propriétés de la dérivée normale et tangentielle du potentiel de double couche.

Dans nos considérations nous allons supposer toujours que la courbe fermée C limitant le domaine non-borné D possède une tangente continue en tout point $P \in C$, et que l'angle que font les tangentes aux deux points P et P_1 de la courbe C satisfasse à la condition de Hölder suivante:

$$|\delta_{PP_1}| \leqq \text{const}\, r_{PP_1}^{\alpha} \qquad 0 < \alpha \leqq 1. \tag{3}$$

2. Étude des intégrales de l'équation (1)

Potentiel de charge plane

On appelle potentiel de charge plane relativement à l'équation (1) l'intégrale suivante

$$V(A,t)=\int_0^t\iint_D \omega(A,t;B,\tau)\,\varrho(B,\tau)\,d\sigma_B\,d\tau \tag{4}$$

où D est un domaine non-borné, limité par la courbe fermée C vérifiant la condition (3).

La fonction $\varrho(B,\tau)$, dite densité de charge, est determinée dans le domaine $[B\in D,\ 0\leqq\tau\leqq T]$. Si la densité ϱ est une fonction bornée dans le domaine $[B\in D,\ 0\leqq\tau\leqq T]$ et intégrable dans toute partie bornée et mesurable de cette région, alors le potentiel (4) est determiné dans tout le plan pour $0\leqq t\leqq T$, et possède la limitation:

$$|V(A,t)|<K_0 t^{1+\frac{1}{2}\lambda}\sup|\varrho| \qquad \begin{cases} 0<\lambda<2 & \text{pour } r_{AB}<R_0 \\ \lambda>2 & \text{pour } r_{AB}>R_0 \end{cases} \tag{5}$$

et admet en tout point les dérivées premières par rapport aux coordonnées du point A, continues, données par la formule:

$$V'_A(A,t)=\int_0^t\iint_D \omega'_A(A,t;B,\tau)\,\varrho(B,\tau)\,d\sigma_B\,d\tau. \tag{6}$$

En outre nous concluons immédiatemment que les dérivées (6) admettent la limitation

$$|V'_A(A,t)|<K_1 t^{1+\frac{1}{2}\lambda}\sup|\varrho| \qquad \begin{cases} 0<\lambda<1 & \text{pour } r_{AB}<R_0 \\ \lambda>1 & \text{pour } r_{AB}>R_0. \end{cases} \tag{7}$$

Il en résulte de même que le potentiel (4) et les dérivées (6) satisfont à la condition de Lipschitz-Hölder

$$|V(A,t)-V(A_1,t)|<H_0 t^{\frac{1}{2}\lambda+1}\sup|\varrho|\,r_{AA_1}, \tag{8}$$

$$V'_A|(A,t)-V'_A(A_1,t)|<H_1 t^{\frac{1}{2}\lambda+1}\sup|\varrho|\,r^{\vartheta}_{AA}, \qquad 0<\vartheta<1, \tag{9}$$

K_0, H_0, K_1, H_1, R_0 étant des constantes positives.

Selon la même supposition concernant la densité ϱ, le potentiel (4) admet les dérivées secondes par rapport aux coordonnées du point A et la dérivée première par rapport au temps:

$$\begin{aligned} V''_A(A,t)&=\int_0^t\iint_D \omega''_A(A,t;B,\tau)\,\varrho(B,\tau)\,d\sigma_B\,d\tau,\\ V'_t(A,t)&=\int_0^t\iint_D \omega'_t(A,t;B,\tau)\,\varrho(B,\tau)\,d\sigma_B\,d\tau \end{aligned} \tag{10}$$

en tout point extérieur au domaine D et pour $0<t\leqq T$.

Ces dérivées vérifient l'équation donnée (1), puisque la fonction ΔV vérifie l'équation de chaleur:

$$\nu\Delta(\Delta V)-\frac{\partial(\Delta V)}{\partial t}=0$$

en tout point A extérieur au domaine D pour $0<t\leqq T$.

Théorème 1. *Si la densité* $\varrho(B, \tau)$, *bornée et continue dans la région* $[B \in D, 0 \leqq \tau \leqq T]$, *vérifie la condition de Hölder:*

$$|\varrho(B, \tau) - \varrho(B_1, \tau)| < \text{const}\, r_{BB_1}^h, \qquad 0 < h \leqq 1, \tag{11}$$

dans une région $[B \in D', 0 \leqq \tau \leqq T]$, *où* D' *est la partie du domaine* D, *alors le potentiel* (4) *admet les dérivées secondes par rapport au point* A *et la dérivée première par rapport au temps en tout point* A *intérieur du domaine* D' *pour* $0 < t \leqq T$.

Démonstration. Nous nous appuierons sur le théorème 2 de notre travail [*7*]. Considérons donc un domaine borné et mesurable D'' contenant à l'intérieur le point arbitraire $A \in D$ et situé dans D'. Nous écrivons le potentiel (4) sous la forme d'une somme des intégrales

$$V(A, t) = V^{D''}(A, t) + V^{D-D''}(A, t) \tag{12}$$

étendues au domaine D'' et au domaine $D - D''$. Or, d'après le travail [*7*] les termes de la somme (12) admettent les secondes dérivées par rapport au point A et de même la première dérivée par rapport à t. Il en résulte de même que e laplacien du potentiel (7) s'exprime par la formule

$$\Delta V(A, t) = \int_0^t \iint_D \Delta\omega(A, t; B, \tau)\, \varrho(B, \tau)\, d\sigma_B\, d\tau \tag{13}$$

dans le domaine $A \in D'$, $0 < t \leqq T$.

Corollaire. La fonction (12) est identique au potentiel de charge plane relativement à l'équation de chaleur

$$\Delta V(A, t) = -\frac{1}{2} \int_0^t \iint_D \frac{1}{t-\tau} e^{-\frac{r_{AB}^2}{4\nu(t-\tau)}} \varrho(B, \tau)\, d\sigma_B\, d\tau$$

et à l'intérieur du domaine $[A \in D', 0 \leqq t \leqq T]$, à supposé que (11) satisfasse, d'après les études du travail [*7*] à l'équation de Poisson

$$\Delta(\Delta V) - \frac{\partial(\Delta V)}{\partial t} = -4\pi\varrho. \tag{14}$$

Aussi, d'après la remarque précédente, en s'appuyant sur les résultats du travail [*3*], nous pouvons constater que le laplacien du potentiel de charge plane possède les dérivées premières par rapport aux coordonnées du point A, de la forme suivante:

$$(\Delta V)'_A = \int_0^t \iint_D [\Delta\omega]'_A\, \varrho(B, \tau)\, d\sigma_B\, d\tau \tag{15}$$

dans tout plan, et pour $0 \leqq t \leqq T$.

D'après les études du travail [*3*] nous tirons les limitations suivantes des intégrales uniformément et absolument convergentes:

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| &< K_2 t^{1-\lambda} \sup|\varrho| \\ |\Delta V| &< K_2 t^{1-\lambda} \sup|\varrho| \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 0 < \lambda < 1 \quad &\text{si} \quad r_{AB} < R_0, \qquad (16) \\ \lambda < 0 \quad &\text{si} \quad r_{AB} > R_0, \qquad (17) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \left|\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)'_A\right| &< K_3 t^{1-\lambda} \sup|\varrho| \\ |(\Delta V)'_A| &< K_3 t^{1-\lambda} \sup|\varrho| \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2} < \lambda < 1 \quad &\text{si} \quad r_{AB} < R_0, \qquad (18) \\ \lambda < \tfrac{1}{2} \quad &\text{si} \quad r_{AB} > R_0; \qquad (19) \end{aligned}$$

K_2 et K_3 étant des constantes positives. En outre les fonctions $\frac{\partial V}{\partial t}$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)'_A$ satisfont aux conditions:

$$\left|\frac{\partial V(A,t)}{\partial t} - \frac{\partial V(A_1,t_1)}{\partial t}\right| < H_2 t^{1-\lambda} \sup|\varrho|\, r_{AA} + H_2' \sup|\varrho|\,|t-t_1|^{\vartheta}, \tag{20}$$

$$\left|\left[\frac{\partial V(A,t)}{\partial t}\right]'_A - \left[\frac{\partial V(A_1,t)}{\partial t}\right]'_A\right| < H_3 t^{1-\lambda} \sup|\varrho|\, r_{AA_1}^{2\lambda-1}, \tag{21}$$

où $0<\vartheta<1$, H_2 et H_3 étant des constantes positives.

Remarque. D'après les résultats récents de W. POGORZELSKI [5] on peut démontrer les propriétés précédentes du potentiel de charge plane, même dans le cas ou la fonction $\varrho(B,\tau)$ n'est pas bornée.

Potentiel de simple couche

On appelle potentiel de simple couche relativement à l'équation (1) l'intégrale suivante

$$W(A,t) = \int_0^t \int_C \omega(A,t;Q,\tau)\,\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau. \tag{22}$$

Les propriétés de ce potentiel ont été discutées dans notre travail [7].

Nous allons étudier quelques propriétés des dérivées du potentiel (22). Evidémment, si nous supposons que la fonction $\mu(Q,\tau)$ est bornée et intégrable dans le domaine $[Q\in C,\ 0\leqq\tau\leqq T]$ nous pouvons démontrer que le potentiel (22) possède la dérivée par rapport à la variable t, donnée par la formule

$$W_t'(A,t) = \int_0^t \int_C \omega_t'(A,t;Q,\tau)\,\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^t \int_C \frac{\mu(Q,\tau)}{t-\tau}\, e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\,dl_Q\,d\tau \tag{23}$$

en tout point $A\in D+C$, $0\leqq t\leqq T$.

La dérivée (23) a la forme du potentiel de simple couche pour l'équation de chaleur et d'après les études du travail [1] vérifie la condition de Hölder de la forme

$$|W_t'(A,t) - W_t'(A,t_1)| < h_2 t^{1-\lambda} r_{AA_1}^{\vartheta} \sup|\mu| + h_2' \sup|\mu|\,|t-t_1|^{\vartheta'/2}, \tag{24}$$

$0<\vartheta\leqq 1$, $0<\vartheta'\leqq 1$, et possède la limitation

$$|W_t'| < k_2 t^{1-\lambda} \sup|\mu|, \tag{25}$$

k_2 et h_2 étant des constantes positives.

Nous allons démontrer que sous les autres suppositions concernant la densité μ, la dérivée (23) peut satisfaire à la condition de Hölder par rapport à la variable t avec l'exposant arbitrairement inférieur à l'unité.

Théorème 2. *Si la fonction $\mu(Q,\tau)$ est continue par rapport aux coordonnées du point $Q\in C$ pour $0<\tau\leqq T$ et satisfait à la condition de Hölder*

$$|\mu(Q,\tau) - \mu(Q,t)| \leqq H_\mu' |\tau - t|^{\beta'}, \tag{26}$$

$0<\tau<t$, $0<\beta'<1$, *alors la dérivée* (23) *du potentiel de simple couche* (22) *satisfait à la condition de Hölder suivante:*

$$|W_t'(A,t) - W_t'(A,t_1)| \leqq h_2' [H_\mu' + t^{-\lambda_*} \sup|\mu|]\,|t-t_1|^{\vartheta} \tag{27}$$

où $t_1>t$, $\frac{1}{2}<\lambda_*<1$, $0<\vartheta\leqq 1$.

Démonstration. Étudions la différence

$$
\begin{aligned}
W_t'(A,t) - W_t'(A,t_1) = &-\frac{1}{2}\int_0^t\int_C \frac{1}{t-\tau}\, e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\,\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau + \\
&+\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int_C \frac{1}{t_1-\tau}\, e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t_1-\tau)}}\,\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau \\
= &-\frac{1}{2}\int_0^t\int_C \frac{1}{t-\tau}\, e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\,[\mu(Q,\tau)-\mu(Q,t)]\,dl_Q\,d\tau + \\
&+\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int_C \frac{1}{t_1-\tau}\, e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t_1-\tau)}}\,[\mu(Q,\tau)-\mu(Q,t_1)]\,dl_Q\,d\tau + \qquad (28)\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int_C \frac{1}{t_1-\tau}\, e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t_1-\tau)}}\,[\mu(Q,t_1)-\mu(Q,t)]\,dl_Q\,d\tau + \\
&+\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int_C \frac{1}{t_1-\tau}\, e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t_1-\tau)}}\,\mu(Q,t)\,dl_Q\,d\tau - \\
&-\frac{1}{2}\int_0^{t}\int_C \frac{1}{t-\tau}\, e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\,\mu(Q,t)\,dl_Q\,d\tau .
\end{aligned}
$$

Les trois premières intégrales dans l'expression (28) satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant $0<\vartheta\leq 1$, ce qui résulte immédiatement des résultats du travail de W. Pogorzelski [*1*]. Considérons donc les deux dernières intégrales (28). Evidemment nous aurons

$$
\begin{aligned}
R = &\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int_C \frac{1}{t_1-\tau}\, e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t_1-\tau)}}\,\mu(Q,t)\,dl_Q\,d\tau - \frac{1}{2}\int_0^{t}\int_C \frac{1}{t-\tau}\, e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\,\mu(Q,t)\,dl_Q\,d\tau \\
= &\int_C [\omega(A,t;\,Q,0)-\omega(A,t_1;\,Q,0)]\,\mu(Q,t)\,dl_Q \qquad (29)\\
= &-\int_C \frac{1}{2t_*}\, e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu t_*}}\,(t-t_1)\,\mu(Q,t)\,dl_Q ,
\end{aligned}
$$

où t_* est choisi arbitrairement dans l'intervalle (t_1, t). D'après la limitation connue de la fonction sous-intégrale nous obtenons

$$|R| < \frac{\text{const}}{t_*^{\lambda_*}}\,|t-t_1|, \tag{30}$$

où $\frac{1}{2}<\lambda_*<1$, et arrivons à la thèse de notre théorème. Enfin, en supposant que la fonction $\mu(Q,\tau)$ satisfasse à la condition de Hölder

$$|\mu(Q,\tau)-\mu(Q_1,\tau)| < H_\mu r_{QQ_1}^\beta \tag{31}$$

on arrive aux inégalités suivantes:

$$|W_A'(A,t)| < k_1'(\sup|\mu| + H_\mu)\, t, \tag{32}$$

$$|W_A'(A,t) - W_A'(A_1,t)| < h_1'(\sup|\mu| + H_\mu)\, t^{1-\lambda} r_{AA_1}^{\beta}, \tag{33}$$

k_1' et h_1' étant des constantes positives dépendant de la courbe C, $0<\lambda<1$.

De même, d'après les résultats de W. Pogorzelski [3], sous la supposition (31) pour la fonction μ, nous arrivons aux inégalités

$$\left|\frac{d}{dl} W_t'(P,t) - \frac{d}{dl} W_t'(P_1,t)\right| < \tilde{h}_3(\sup|\mu|\, t^{1-\lambda_1} + H_\mu)\, r_{PP_1}^{\beta}, \tag{34}$$

$$\left|\frac{d}{dl} W_t'\right| < k_3(\sup|\mu|\, t^{1-\lambda_1} + H_\mu t^{1-\lambda_2}), \tag{35}$$

$$|(\Delta W)_A'| < k_3'(\sup|\mu|\, t^{1-\lambda_1} + H_\mu t^{1-\lambda_2}), \tag{36}$$

k_3, k_3', h_3 étant des constantes positives, $0<\lambda_1<1$, $0<\lambda_2<1$.

Potentiel de double couche

On appelle potentiel de double couche relativement à l'équation (1) l'intégrale suivante:

$$U(A,t) = \int_0^t \int_C \frac{d\omega}{dn_Q} \zeta(Q,\tau)\, dl_Q\, d\tau = \int_0^t \int_C \frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}} e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} \zeta(Q,\tau)\, dl_Q\, d\tau \tag{37}$$

où γ_ϑ désigne l'angle que fait la normale intérieure au point Q de la courbe C avec le vecteur $\overrightarrow{QA}$.

En outre, nous avons démontré dans le travail [7] que le potentiel (37) satisfait aux inégalités

$$|U(P,t) - U(P_1,t)| < h_1 t^{\frac{1}{2}\lambda+1} \sup|\zeta|\, r_{PP_1}^{\vartheta\alpha}, \tag{38}$$

$$|U(P,t)| < k_1 t^{\frac{1}{2}\lambda+1} \sup|\zeta|, \tag{39}$$

supposition faite que la fonction $\zeta(Q,\tau)$ est continue et bornée dans la région $[Q\in C,\ 0\leqq t\leqq T]$, h_1 et k_1 étant des constantes positives.

Dérivée normale du potentiel de double couche

Ecrivons le potentiel (37) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} U(A,t) &= \int_0^t \int_C \frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}} e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} \zeta(Q,\tau)\, dl_Q\, d\tau - \\ &\quad - \int_0^t \int_C \frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}} \zeta(P,\tau)\, dl_Q\, d\tau + \int_0^t \int_C \frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}} \zeta(P,\tau)\, dl_Q\, d\tau \\ &= \int_0^t \int_C \frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}} \left[e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} - 1\right] \zeta(Q,\tau)\, dl_Q\, d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \int_C \frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}} [\zeta(Q,\tau) - \zeta(P,\tau)]\, dl_Q\, d\tau + 2\pi \int_0^t \zeta(P,\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{40}$$

Il en résulte que la dérivée du potentiel (37) dans la direction d'une normale au point P de la courbe C (le point A est situé sur cette normale) s'exprime par les intégrales

$$\frac{dU(A,t)}{dn_P} = \int_0^t \int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}}\right)\left[e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} - 1\right]\zeta(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau +$$
$$-\int_0^t \int_C \frac{\cos\gamma_Q \cos\gamma_P}{2\nu(t-\tau)} e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} \zeta(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau + \tag{41}$$
$$+\int_0^t \int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}}\right)[\zeta(Q,\tau)-\zeta(P,\tau)]\,dl_Q\,d\tau.$$

En s'appuyant sur les études de J. SCHAUDER [*6*], concernant la dérivée normale du potentiel logarithmique de double couche, nous pouvons démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 3. *Si la fonction $\zeta(Q,\tau)$ possède la dérivée par rapport à l'arc vérifiant la condition de Hölder,*

$$\left|\frac{d}{dl}\zeta(Q,\tau) - \frac{d}{dl}\zeta(Q_1,\tau)\right| < \widetilde{H}_\zeta\, r_{QQ_1}^\beta, \tag{42}$$

continue par rapport à la variable τ, et si la courbe C satisfait à la condition (3), *où $0<\beta\leqq\alpha$, alors la dérivée normale du potentiel* (37) *tend uniformément vers la valeur limite*

$$\lim_{A\to P\in C}\frac{dU(A,t)}{dn_P} = \int_0^t \int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_Q^0}{r_{PQ}}\right)\left[e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} - 1\right]\zeta(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau +$$
$$-\int_0^t \int_C \frac{\cos\gamma_Q^0 \cos\gamma_P^0}{2\nu(t-\tau)} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} \zeta(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau + \tag{43}$$
$$+\int_0^t \int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_Q^0}{r_{PQ}}\right)[\zeta(Q,\tau)-\zeta(P,\tau)]\,dl_Q\,d\tau = \frac{dU(P,t)}{dn},$$

et cette valeur limite existe au sens de la valeur principale de Cauchy, γ_P^0 étant l'angle entre la normale intérieure au point Q avec $\overrightarrow{QP}$, et γ_Q^0 étant l'angle entre la normale intérieure au point P avec $\overrightarrow{PQ}$.

Démonstration. Nous allons montrer d'abord que la valeur limite $\dfrac{dU(P,t)}{dn_P}$ existe au sens de la valeur principale de Cauchy. Pour la troisième intégrale de l'expression (43) cette propriété résulte directement du théorème de J. SCHAUDER [*loc. cit.*] concernant la dérivée normale du potentiel logarithmique de double couche. Quant à la seconde intégrale (43) — elle est absolument convergente à la seule supposition que la fonction $\zeta(Q,\tau)$ soit continue et bornée et que la courbe C satisfasse à la condition (3). Evidemment, d'après la limitation de la fonction sous-intégrale

$$\left|\frac{\cos\gamma_Q^0\cos\gamma_P^0}{2\nu(t-\tau)} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^\lambda}\,\frac{1}{r_{PQ}^{2-2\alpha-2\lambda}} \tag{44}$$

nous pouvons constater, en choisissant $\lambda<1$, $\alpha+\lambda>\frac{1}{2}$, que l'intégrale

$$\int_0^t\int_C \frac{\cos\gamma_Q^0\cos\gamma_P^0}{2\nu(t-\tau)}\, e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\,\zeta(P,\tau)\,dl_Q\,d\tau$$

est absolument convergente.

La première intégrale (43) possède la même propriété. En effet, écrivons

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_C \frac{d}{dn_P}\left(\frac{\cos\gamma_Q^0}{r_{PQ}}\right)\left[e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}-e^{-\frac{r_{PP}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right]\zeta(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau \\ = -\int_0^t\int_C \frac{2\cos\gamma_Q^0\cos\gamma_P^0}{r_{PQ}}\,\frac{r_{P^*Q}}{2\nu(t-\tau)}\,e^{\frac{r_{P^*Q}^2}{4\nu(t-\tau)}}\,\zeta(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau + \\ + \int_0^t\int_C \frac{\cos\vartheta}{r_{PQ}}\,\frac{r_{P^*Q}}{2\nu(t-\tau)}\,e^{-\frac{r_{P^*Q}^2}{4\nu(t-\tau)}}\,\zeta(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau = J_1+J_2,\end{aligned} \tag{45}$$

où P^* est le point arbitraire de l'arc PQ. La distance r_{P^*Q} étant comparable avec r_{PQ} — nous pouvons constater que la fonction sous-intégrale dans l'intégrale J_1 possède la limitation (44) d'où il résulte que la fonction J_1 est absolument convergente. La fonction sous-intégrale dans l'intégrale J_2 possède la limitation

$$\left|\frac{\cos\vartheta}{r_{PQ}}\,\frac{r_{P^*Q}}{2\nu(t-\tau)}\,e^{-\frac{r_{P^*Q}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^\lambda}\,\frac{1}{r_{PQ}^{2-2\lambda}}. \tag{46}$$

Nous en pouvons déduire, en choisissant $\frac{1}{2}<\lambda<1$, que l'intégrale J_2 est absolument convergente.

Maintenant, de la méthode bien connue dans la théorie classique du potentiel, on peut démontrer que

$$\left|\frac{dU(A,t)}{dn_P}-\frac{dU(P,t)}{dn_P}\right|<\varepsilon \quad\text{si}\quad |AP|<\eta_\varepsilon$$

c'est-à-dire la thèse du théorème 3.

En s'appuyant sur l'expression (43), nous pouvons démontrer la limitation suivante:

$$\left|\frac{dU(P,t)}{dn_P}\right| < k_4\left(t^{1-\lambda}\sup|\zeta| + t\sup\left|\frac{d\zeta}{dl}\right| + t\widetilde{H}_\zeta\right) \tag{47}$$

k_4 étant une constante positive.

Théorème 4. *Si la fonction $\zeta(Q,\tau)$ satisfait à la condition* (42), *la courbe C satisfait à la condition* (3), *alors la valeur limite* (43) *de la dérivée normale du potentiel* (46) *satisfait à la condition de Hölder suivante*:

$$\left|\frac{dU(P,t)}{dn_P}-\frac{dU(P_1,t)}{dn_P}\right| < h_4\left(t^{1-\lambda}\sup|\zeta| + t\sup\left|\frac{d\zeta}{dl}\right| + t\widetilde{H}_\zeta\right) r_{PP_1}^\beta \tag{48}$$

où h_4 est une constante positive.

Démonstration. La valeur limite (43) se compose de trois intégrales, dont es deux premières possèdent la singularité faible. Donc, d'après les méthodes

bien connues dans la théorie du potentiel, il est facile à démontrer, que'elles satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant $\vartheta > 0$, arbitrairement inférieur à l'unité. Quant à la troisième intégrale (43), la démonstration du théorème énoncé sera la même que dans le travail [7].

Dérivée tangentielle du potentiel de double couche

Théorème 5. *Si la fonction $\zeta(Q, \tau)$, vérifiant la condition de Hölder*

$$|\zeta(Q,\tau) - \zeta(Q_1,\tau)| < H_\zeta r_{PP_1}^{\beta_1} \tag{49}$$

est continue par rapport à la variable τ et si $\alpha + \beta_1 > 1$, α étant l'exposant de la supposition 3, alors le potentiel (37) en tout point P de la courbe C elle-même, possède la dérivée par rapport à l'arc, vérifiant la condition de Hölder,

$$\left| \frac{dU(P,t)}{dl} - \frac{dU(P_1,t)}{dl} \right| < \tilde{h}_4 \left[t^{1-\lambda} \sup|\zeta| + t H_\zeta \right] r_{PP_1}^{\alpha+\beta_1-1}, \tag{50}$$

où la constante positive $\tilde{h}_4$ dépend de la courbe C.

Démonstration. D'après l'expression (40), nous pouvons écrire la dérivée par rapport à l'arc du potentiel (37), en tout point P de la courbe C sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{dU(P,t)}{dl_P} = & \int_0^t \int_C \frac{d}{dl_P}\left(\frac{\cos\gamma_Q^0}{r_{PQ}}\right) \left[e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} - 1 \right] \zeta(Q,\tau)\, dl_Q\, d\tau + \\ & - \int_0^t \int_C \frac{\cos\gamma_Q^0 \sin\gamma_P^0}{2\nu(t-\tau)} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} \zeta(Q,\tau)\, dl_Q\, d\tau + \\ & - \int_0^t \int_C \frac{d}{dl_P}\left(\frac{\cos\gamma_Q^0}{r_{PQ}}\right) [\zeta(Q,\tau) - \zeta(P,\tau)]\, dl_Q\, d\tau. \end{aligned} \tag{51}$$

Donc, d'après les considérations analogues, que dans le théorème 3, nous pouvons constater que les deux premières intégrales de l'expression (51) aux singularités faibles, satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant arbitrairement inférieur à l'unité. Donc, la troisième intégrale, d'après les études de J. Schauder [*loc. cit.*], satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $\alpha + \beta_1 - 1$, c.q.f.d.

De même nous obtenons facilement les limitations:

$$\left| \frac{dU(P,t)}{dl_P} \right| < \tilde{k}_4 \left(t^{1-\lambda} \sup|\zeta| + H_\zeta t \right), \tag{52}$$

$$|U_A'(A,t)| < k_4' \left(t^{1-\lambda} \sup|\zeta| + t \sup\left| \frac{d\zeta}{dl} \right| + t \widetilde{H}_\zeta \right). \tag{53}$$

Dérivée par rapport à la variable t du potentiel de double couche

D'après le résultat du travail [7] la dérivée par rapport à la variable t du potentiel de double couche s'exprime par l'intégrale:

$$U_t'(A,t) = \int_0^t \int_C \frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)^2} \frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}} e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} \zeta(Q,\tau)\, dl_Q\, d\tau \tag{54}$$

et vérifie les inégalités:

$$|U_t'(P,t) - U_t'(P_1,t_1)| < h_3 \sup|\zeta| \left[r_{PP_1}^{\vartheta\alpha} t^{\frac{1-\vartheta}{2}\alpha} + |t-t_1|^{\frac{\vartheta'}{2}} \right] \tag{55}$$

$$|U_t'(P,t)| < k_3 \sup|\zeta|\, t^{\frac{1-\vartheta}{2}\alpha} \tag{56}$$

où $0<\vartheta<1$, $0<\vartheta'<1$, h_3, k_3 étant des constantes positives. Par la même méthode que dans le théorème 2, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème 6. *Si la fonction $\zeta(Q,\tau)$, définie dans le domaine $[Q\in C,\ 0\leqq\tau\leqq T]$, est continue par rapport aux coordonnées du point Q et vérifie la condition*

$$|\zeta(Q,\tau)-\zeta(Q,t)| < H_\zeta' |\tau - t|^{\beta'}, \qquad 0<\beta'\leqq 1, \tag{57}$$

alors la dérivée (54) satisfait à la condition de Hölder suivante:

$$|U_t'(A,t) - U_t'(A,t_1)| < h_3'\left(H_\zeta' + t^{-\lambda_{**}}\sup|\zeta|\right)|t-t_1|^{\vartheta}, \tag{58}$$

où $t_1>t$, $1-\frac{1}{2}\alpha<\lambda_{**}<1$, $0<\vartheta\leqq 1$.

Théorème 7. *Si la fonction $\zeta(Q,\tau)$ vérifie la condition (49) et la condition (57), si la courbe C satisfait à le condition (3), si $\alpha+\beta_1>1$ et si $\alpha+2\beta'>1$, alors la dérivée du potentiel (37) par rapport à la variable t, ayant la forme (54) possède la dérivée par rapport à l'arc en tout point P de la courbe C, vérifiant la condition de Hölder*

$$\left|\frac{d}{dl}U_t'(P,t) - \frac{d}{dl}U_t'(P_1,t)\right| < \tilde{h}_5\left(t^{1-\lambda}H_\zeta' + t^{-\lambda_*'}\sup|\zeta| + H_\zeta\right) r_{PP_1}^{\alpha+\beta_1-1}. \tag{59}$$

Démonstration. Écrivons donc la fonction (54) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} U_t'(A,t) = &\int_0^t\int_C \frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}} \frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} [\zeta(Q,\tau)-\zeta(Q,t)]\, dl_Q\, d\tau + \\ &+ \int_C \frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}}\left[e^{-\frac{r_{AQ}^2}{4\nu t}} - 1\right]\zeta(Q,t)\, dl_Q + \int_C \frac{\cos\gamma_Q}{r_{AQ}}\zeta(Q,t)\, dl_Q. \end{aligned} \tag{60}$$

Il en résulte que la dérivée par rapport à l'arc de la fonction (54) en tout point P de la courbe C elle-même s'exprime par les intégrales aux singularités faibles suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl}[U_t'(P,t)] = &\int_0^t\int_C \frac{d}{dl}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right][\zeta(Q,\tau)-\zeta(Q,t)]\, dl_Q\, d\tau + \\ &+ \int_C \frac{d}{dl}\left[\frac{\cos\gamma_Q^0}{r_{PQ}}\left(e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}} - 1\right)\right]\zeta(Q,t)\, dl_Q + \int_C \frac{d}{dl}\left(\frac{\cos\gamma_Q^0}{r_{PQ}}\right)[\zeta(Q,t)-\zeta(P,t)]\, dl_Q. \end{aligned} \tag{61}$$

En effet pour la première intégrale cette propriété est évidente d'après la limitation de la fonction sous intégrale

$$\left|\frac{d}{dl}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right][\zeta(Q,\tau)-\zeta(Q,t)]\right| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\lambda}} \frac{H_\zeta'}{r_{PQ}^{4-2\lambda-2\beta'-\alpha}}, \tag{62}$$

remarque faite que $\frac{d}{dl}(\cos\gamma) = \frac{\cos\gamma_Q \sin\gamma_P - \sin\vartheta}{r_{PQ}}$ et $\alpha + 2\beta' > 1$. En choisissant $\frac{3-\alpha-2\beta'}{2} < \lambda < 1$ nous pouvons constater que la première intégrale (61) est uniformément convergente. La seconde intégrale (61) se compose de deux membres

$$\begin{aligned}\int\limits_C \frac{d}{dl}\left[\frac{\cos\gamma_Q^0}{r_{PQ}}\left(e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu t}} - 1\right)\right]\zeta(Q,t)\,dl_Q = &-\int\limits_C \frac{\cos\gamma_Q^0 \sin\gamma_P^0}{2\nu t} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu t}} \zeta(Q,t)\,dl_Q + \\ &+ \int\limits_C \frac{2\cos\gamma_Q^0 \sin\gamma_P^0 - \sin\vartheta}{r_{PQ}} \frac{r_{P^*Q}}{2\nu t} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu t}} \zeta(Q,t)\,dl_Q,\end{aligned} \tag{63}$$

où la différence $\left(e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu t}} - 1\right)$ est transformée de la même façon que dans l'expression (45).

En tenant compte que r_{P^*Q} est comparable avec r_{PQ}, nous arrivons aux limitations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\cos\gamma_Q^0 \sin\gamma_P^0}{2\nu t} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu t}}\right| \\ &\left|\frac{2\cos\gamma_Q^0 \sin\gamma_P^0 - \sin\vartheta}{r_{PQ}} \frac{r_{P^*Q}}{2\nu t} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu t}}\right|\end{aligned}\right\} < \frac{\text{const}}{t^{-\lambda'_*} r_{PQ}^{2-2\lambda'_*-\alpha}}. \tag{64}$$

En choisissant λ'_* de l'intervalle $\left(\frac{1-\alpha}{2}, 1\right)$, nous pouvons constater que l'intégrale (63) est uniformément convergente. La dernière intégrale (61) d'après les études du travail [7] possède la même propriété.

On peut démontrer, par une méthode analogue à celle employée dans la théorie du potentiel, que les deux premières intégrales satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant $0 < \vartheta < 1$ et la dernière, d'après les études de J. Schauder [*loc. cit.*] à la condition de Hölder avec l'exposant $\alpha + \beta_1 - 1$.

Il en résulte donc la thèse du théorème 7. Evidemment on arrive à l'inégalité suivante:

$$\left|\frac{d}{dl}[U_t'(P,t)]\right| < \tilde{k}_5 (t^{1-\lambda} H'_\xi + t^{-\lambda'_*} \sup|\zeta| + H_\xi). \tag{65}$$

Théorème 8. *Si la fonction $\zeta(Q,\tau)$ vérifie les conditions* (42), (57), *supposition faite que $\frac{1}{2} < \beta' < 1$, la courbe C vérifie la condition* (3), *supposition faite que $0 < \beta \leqq \alpha$, alors la dérivée du potentiel* (37) *par rapport à la variable t, ayant la forme* (54), *possède la dérivée normale $\frac{d}{dn_P}[U_t'(A,t)]$, qui tend uniformément vers la valeur limite*

$$\begin{aligned}\lim_{A\to P\in C} \frac{d}{dn_P}[U_t'(A,t)] &= \frac{d}{dn_P}[U_t'(P,t)] \\ &= \int\limits_0^t \int\limits_C \frac{d}{dn_P}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right][\zeta(Q,\tau) - \zeta(Q,t)]\,dl_Q\,d\tau + \\ &\quad + \int\limits_C \frac{d}{dn_P}\left[\frac{\cos\gamma_Q^0}{r_{PQ}}\left(e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu t}} - 1\right)\right]\zeta(Q,t)\,dl_Q + \\ &\quad + \int\limits_C \frac{d}{dn_P}\left[\frac{\cos\gamma_Q^0}{r_{PQ}}\right][\zeta(Q,t) - \zeta(P,t)]\,dl_Q,\end{aligned} \tag{66}$$

et cette valeur limite existe au sens de la valeur principale de Cauchy.

Démonstration. Nous allons démontrer d'abord que la valeur limite (66) existe au sens de la valeur principale de Cauchy. Cette propriété est évidente pour la dernière intégrale (voir [7]). Les autres intégrales sont absolument convergentes. Notamment, d'après la méthode appliquée dans les théorèmes 3 et 6, nous pouvons constater que la fonction sous intégrales dans la première intégrale (66) possède la limitation

$$\left|\frac{d}{dn_P}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t-\tau)^2}e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right][\zeta(Q,\tau)-\zeta(Q,t)]\right| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^\lambda}\left[\frac{1}{r_{PQ}^{4-2\lambda-2\beta'-2\alpha}}+\frac{1}{r_{PQ}^{4-2\lambda-2\beta'}}\right].$$

En choisissant $\frac{3}{2}-\beta'<\lambda<1$, nous pouvons constater que la première intégrale (66) est uniformément convergente.

La fonction sous-intégrale dans la seconde intégrale possède la limitation

$$\left|\frac{d}{dn_P}\left[\frac{\cos\gamma_Q^0}{r_{PQ}}\left(e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu t}}-1\right)\right]\right| < \frac{\text{const}}{t^{\lambda_*}}\left[\frac{1}{r_{PQ}^{2-2\lambda_*-2\alpha}}+\frac{1}{r_{PQ}^{2-2\lambda_*}}\right].$$

En choisissant $\frac{1}{2}<\lambda_*<1$, nous pouvons constater que la seconde intégrale (66) est aussi uniformément convergente. Maintenant, d'après les méthodes bien connues dans la théorie du potentiel, nous pouvons démontrer, que

$$\lim_{A\to P\in C}\frac{d}{dn_P}[U_t'(A,t)] = \frac{d}{dn_P}[U_t'(P,t)]$$

c.q.f.d.

Théorème 9. *Si les conditions supposées dans le théorème* 8 *sont satisfaites, alors la dérivée normale de la fonction* (54) *satisfait à la condition de Hölder suivante:*

$$\left|\frac{d}{dn_P}[U_t'(P,t)] - \frac{d}{dn_P}[U_t'(P_1,t)]\right| < h_5\left[t^{1-\lambda}H_\zeta' + \frac{1}{t^{\lambda_*}}\sup|\zeta| + \widetilde{H}_\zeta\right] r_{PP_1}^{\beta}. \quad (67)$$

Démonstration. La preuve du théorème résulte immédiatemment des considérations précédentes, concernant les intégrales aux singularités faibles, et des études de J. Schauder [*loc. cit.*]. Nous aurons de même les limitations évidentes

$$\left|\frac{d}{dn_P}[U_t'(P,t)]\right| < k_5\left[t^{1-\lambda}H_\zeta' + \frac{1}{t^{\lambda_*}}\sup|\zeta| + \widetilde{H}_\zeta\right], \quad (68)$$

$$|[U_t'(A,t)]_A'| < k_5'\left[t^{1-\lambda}H_\zeta' + \frac{1}{t^{\lambda_*}}\sup|\zeta| + H_\zeta + \widetilde{H}_\zeta\right]. \quad (69)$$

Théorème 10. *Selon les mêmes suppositions que dans le théorème 7 la dérivée par rapport à l'arc de la fonction $U_t'(A,t)$ satisfait à la condition de Hölder par rapport à la variable t*

$$\left|\frac{d}{dl}[U_t'(P,t)] - \frac{d}{dl}[U_t'(P,t_1)]\right| < \tilde{h}_5'\left[t^{\frac{\vartheta}{4}\varepsilon}H_\zeta' + t^{-\lambda_*'}\sup|\zeta| + H_\zeta\right]|t-t_1|^{\frac{\vartheta}{4}\varepsilon}, \quad (70)$$

où $\varepsilon=\min[\alpha+2\beta'-1,\ \lambda(\alpha+\vartheta),\ 2(\alpha+\beta_1-1)]$, $\frac{1-\alpha}{2}<\lambda_*'\leqq 1$, $\tilde{h}_5'$ *est une constante positive.*

Démonstration. Nous allons démontrer le théorème cité suivant la méthode indiquée par W. Pogorzelski dans le travail [3]. D'après l'expression (61) nous pouvons décomposer la dérivée $\frac{d}{dl}[U_t'(A,t)]$ en trois parties que nous désignons

par J_1, J_2, J_3. Étudions la première différence

$$
\begin{aligned}
&J_1(P,t)-J_1(P,t_1)\\
&=\int_0^t\int_C \frac{d}{dl}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t-\tau)^2}\,e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right][\zeta(Q,\tau)-\zeta(Q,t)]\,dl_Q\,d\tau+\\
&\quad-\int_0^{t_1}\int_C \frac{d}{dl}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t_1-\tau)^2}\,e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t_1-\tau)}}\right][\zeta(Q,\tau)-\zeta(Q,t_1)]\,dl_Q\,d\tau\\
&=\int_{t_1}^t\int_C \frac{d}{dl}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t-\tau)^2}\,e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right][\zeta(Q,\tau)-\zeta(Q,t)]\,dl_Q\,d\tau+\\
&\quad+\int_0^{t_1}\int_C \frac{d}{dl}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t-\tau)^2}\,e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right][\zeta(Q,\tau)-\zeta(Q,t)]\,dl_Q\,d\tau+\\
&\quad-\int_0^{t_1}\int_C \frac{d}{dl}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t_1-\tau)^2}\,e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t_1-\tau)}}\right][\zeta(Q,\tau)-\zeta(Q,t_1)]\,dl_Q\,d\tau=J_{11}+J_{12}+J_{13}.
\end{aligned}
\tag{71}
$$

D'après la limitation (62) nous aurons

$$|J_{11}|<\text{const}\,H'_\zeta\,|t-t_1|^{\vartheta\frac{\alpha+2\beta'-1}{2}}<\text{const}\,H'_\zeta\,t^{\vartheta\frac{\alpha+2\beta'-1}{4}}\,|t-t_1|^{\vartheta\frac{\alpha+2\beta'-1}{4}}. \tag{72}$$

Pour étudier la seconde intégrale (67) considérons le cercle Π de centre P et dont le rayon r_Π n'est pas fixé pour le moment. Décomposons les intégrales J_{12} et J_{13} en deux parties:

$$J_{12}+J_{13}=J_{12}^{C_\Pi}+J_{13}^{C_\Pi}+(J_{12}+J_{13})^{C-C_\Pi} \tag{73}$$

prises suivant la portion C_Π de la courbe C intérieure au cercle Π et la portion $C-C_\Pi$ extérieure au cercle Π.

Il suffit d'étudier le cas où r_Π est le rayon suffisamment petit $r_\Pi<\delta$, où δ est le rayon du cercle K assez petit pour que la partie de la courbe C intérieure au cercle K puisse être coupée par chaque parallèle à la normale en P en un point au plus. Evidemment nous aurons

$$
\begin{aligned}
|J_{12}^{C_\Pi}|&<\text{const}\,H'_\zeta\,t^{1-\bar\lambda}\,r_\Pi^{\alpha+2\beta'+2\bar\lambda-3},\\
|J_{13}^{C}|&<\text{const}\,H'_\zeta\,t^{1-\bar\lambda}\,r_\Pi^{\alpha+2\beta'+2\bar\lambda-3},
\end{aligned}
\tag{74}
$$

où

$$\frac{3-\alpha-2\beta'}{2}<\bar\lambda<1.$$

Transformons maintenant la somme $(J_{12}+J_{13})^{C-C_\Pi}$ de la façon suivante:

$$
\begin{aligned}
(J_{12}+J_{13})^{C-C_\Pi}&=\int_0^{t_1}\int_{C-C_\Pi}\frac{d}{dl}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t-\tau)^2}\,e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right][\zeta(Q,t_1)-\zeta(Q,t)]\,dl_Q\,d\tau+\\
&+\int_0^{t_1}\int_{C-C_\Pi}\left\{\frac{d}{dl}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t-\tau)^2}\,e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t-\tau)}}\right]-\frac{d}{dl}\left[\frac{r_{PQ}\cos\gamma_Q^0}{4\nu(t_1-\tau)^2}\,e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4\nu(t_1-\tau)}}\right]\right\}\times\\
&\times[\zeta(Q,\tau)-\zeta(Q,t_1)]\,dl_Q\,d\tau=J_{12}'^{\,C-C_\Pi}+J_{13}'^{\,C-C_\Pi}.
\end{aligned}
\tag{75}
$$

La première intégrale (75) satisfera à l'inégalité:

$$|J'_{12}| < \text{const}\, t^{1-\bar\lambda} H'_\zeta |t-t_1|^{\beta'} \frac{1}{r_\Pi^{3-2\bar\lambda-\alpha}}. \tag{76}$$

En appliquant à la fonction sous-intégrale dans l'intégrale J'_{13} le théorème des accroissements nous arrivons à l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} |J'_{13}| &< \text{const}\, |t-t_1|\, H'_\zeta \int_0^{t_1} \int_{C-C_\Pi} \frac{|\tau-t_1|^{\beta'}}{(t-\tau)^{\lambda}} \frac{1}{r_{PQ}^{6-2\bar\lambda-\alpha}} dl_Q\, d\tau \\ &< \text{const}\, t^{1-\bar\lambda} H'_\zeta |t-t_1|^{1+\beta'} \frac{1}{r_\Pi^{5-2\bar\lambda-\alpha}}, \end{aligned} \tag{77}$$

où la constante ne dépend pas de r_Π.

Choisissons maintenant le rayon r_Π en posant

$$r_\Pi = \text{const}\, |t-t|^{\frac{1}{2}} < \delta. \tag{78}$$

Evidemment nous avons

$$\tfrac{1}{2}(5-2\bar\lambda-\alpha) \leqq 1+\beta', \qquad \tfrac{1}{2}(3-2\bar\lambda-\alpha) \leqq \beta'.$$

Il en résulte d'après (72), (74), (77), (76)

$$|J_1(P,t) - J_1(P,t_1)| < \text{const}\, t^{\vartheta\frac{\alpha+2\beta'-1}{4}} H'_\zeta |t-t_1|^{\vartheta\frac{\alpha+2\beta'-1}{4}}. \tag{79}$$

Appliquant la méthode précédente aux intégrales $J_2(P,t)$ et $J_3(P,t)$ nous arrivons aux inégalités

$$|J_2(P,t) - J_2(P,t_1)| < \text{const}\, [t^{-\lambda'_*} \sup|\zeta| + H_\zeta t^{1-\lambda}]\, |t-t_1|^{\vartheta\frac{\alpha+\vartheta}{4}}, \tag{80}$$

$$|J_3(P,t) - J_3(P,t_1)| < \text{const}\, \left[t^{\vartheta\frac{\alpha+\beta_1-1}{4}} H'_\zeta + H_\zeta\right] |t-t_1|^{\vartheta\frac{\alpha+\beta_1-1}{4}}. \tag{81}$$

En rapprochant les résultats (79), (80), (81) nous arrivons à la thèse du théorème 10.

La démonstration analogue appliquée à la dérivée normale du potentiel $U'_t(P,t)$ nous amène au théorème suivant.

Théorème 11. *Selon les suppositions admises dans le théorème 8 et la supposition*

$$\left|\frac{d\zeta(P,\tau)}{dl} - \frac{d\zeta(P,t)}{dl}\right| < \widetilde{H}'_\zeta |\tau-t|^{\tilde\beta}, \qquad 0 < \tilde\beta \leqq 1; \tag{82}$$

la dérivée normale de la fonction $U'_t(P,t)$ satisfait à la condition de Hölder suivante:

$$\left|\frac{d}{dn}[U'_t(P,t)] - \frac{d}{dn}[U'_t(P,t_1)]\right| < h_6\left[t^{\frac{\vartheta}{4}\varepsilon_1} \widetilde{H}'_\zeta + t^{-\lambda_*} \sup|\zeta| + \widetilde{H}_\zeta + \widetilde{H}_\zeta\right] |t-t_1|^{\frac{\vartheta}{4}\varepsilon_1}, \tag{83}$$

où $\varepsilon_1 = \min(2\beta'-1, 2\beta, 4\tilde\beta)$ et $\frac{1}{2} < \lambda_* \leqq 1$, h_6 étant une constante positive.

Bibliographie

[1] Pogorzelski, W.: Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale. Ann. Pol. Math. **4** (1957).
[2] Pogorzelski, W.: Etude de la solution fondamentale de l'équation parabolique. Ricerche di Mat. **5**, 1—33 (1956).
[3] Pogorzelski, W.: Propriétés des dérivées tangentielles d'une intégrale de l'équation parabolique. Ricerche di Mat. **6** (1957).
[4] Pogorzelski, W.: Etude de la solution fondamentale de l'équation elliptique. Ann. Pol. Math. **3** (1957).
[5] Pogorzelski, W.: Propriétés des intégrales généralisées de Poisson Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique. Ann. Sci. de l'Éc. Norm. Sup. Paris (1959).
[6] Schauder, J.: Potentialtheoretische Untersuchungen. Math. Z. **33**, 602—640 (1931).
[7] Wolska-Bochenek, J.: Propriétés des intégrales d'une équation de l'hydrodynamique du liquide visqueux. Ann. Pol. Math. **7** (1960).

Institut mathématique de l'académie
polonaise des sciences
Warszawa

(Reçu le 23 novembre 1960)

Problème aux limites pour un domaine non-borné dans la théorie du mouvement non-stationnaire d'un liquide visqueux

J. Wolska-Bochenek

Communicated by R. Finn

1. Introduction

Dans la théorie du mouvement plan d'un liquide visqueux incompressible, on déduit l'équation:

$$\nu \Delta \Delta \psi - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \varphi \tag{1}$$

où $\psi(x, y, t)$, dite fonction du courant, est définie par les égalités:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1'}$$

où v_x et v_y sont les composantes du vecteur de vitesse $\vec{v}$, $\varphi(x, y, t) = \mathrm{rot}_z \vec{F}$, où $\vec{F}$ est le vecteur des forces extérieures; ν est le coëfficient de viscosité cinématique.

Dans ce travail nous nous proposons de trouver une fonction $\psi(x, y, t)$, qui à l'intérieur du domaine *non-borné* D, limité par l'ensemble fini des courbes fermées disjointes $C_1, C_2, \ldots, C_p$ satisfasse à l'équation (1) et en tout point P de la frontière $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_p$ satisfasse aux conditions limites suivantes:

$$\lim_{A \to P \in C} \frac{d\psi(A, t)}{dt} = 0 \qquad \lim_{A \to P \in C} \frac{d\psi(A, t)}{dn} = G(P, t); \qquad 0 < t \leqq T \tag{2}$$

où la première des conditions (2) est équivalente à la condition:

$$\lim_{A \to P \in C} \psi(A, t) = g(t);$$

les fonctions $g(t)$ et $G(P, t)$ étant données.

En outre nous demandons que la fonction $\psi(x, y, t)$ satisfasse à la condition initiale

$$\lim_{t \to 0} \psi(A, t) = f(A); \qquad A \in D \tag{3}$$

où la fonction $f(A)$ est donnée.

La résolution du problème mathématique (1), (2), (3) permet d'obtenir la résolution du problème fondamental de l'hydrodynamique, c'est-à-dire, de déterminer le mouvement non-stationnaire d'un liquide visqueux dans un domaine non-borné.

En effet, au point de vue de l'hydrodynamique, les conditions (2) expriment que le liquide visqueux a la vitesse donnée tangente au bord du domaine.

Évidemment, la première condition (2) exprime qu'en tout point P de la frontière C la composante normale du vecteur de la vitesse est nulle, c'est-à-dire que le vecteur de la vitesse $\vec{v}$ est tangent au bord du domaine.

La seconde condition (2) exprime que la composante tangentielle du vecteur de la vitesse du fluide a une valeur donné en tout point P de la frontière C. Dans le cas $G(P, t) \equiv 0$ les conditions (2) expriment que le liquide visqueux adhère au bord du domaine. Quant à la condition initiale nous pouvons remarquer que la fonction $f(A)$ est déterminée à une constante près par les composantes v_x^0 et v_y^0 du vecteur de la vitesse, données *a priori* au moment initial. En effet la fonction $f(A)$ s'exprime par l'intégrale curviligne

$$f(A) = \int_{A_0 A} v_y^0 \, dx - v_x^0 \, dy + \text{const}, \tag{3'}$$

A_0 étant un point arbitraire du domaine D, étant supposé que les intégrales

$$\int_{C_i} v_y^0 \, dx - v_x^0 \, dy = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

La condition initiale (3) étant satisfaite, nous en pouvons déduire (démonstration donnée dans le présent travail) que

$$\lim_{t \to 0} v_x = v_x^0, \qquad \lim_{t \to 0} v_y = v_y^0.$$

Donc, il est évident, que d'après la solution du problème (1), (2), (3) et les inégalités (1′) nous pouvons déterminer en tout point arbitraire A du domaine D et pour chaque moment t de l'intervalle $(0, T)$ le vecteur de la vitesse du fluide visqueux, dont les composantes sont connues au moment initial et au bord du domaine.

2. Résolution du problème aux limites

Pour résoudre le problème proposé (1), (2), (3) on admet les suppositions suivantes:

I. Les lignes fermées $C_1, C_2, \ldots, C_p$ ont la tangente continue en tout point, et l'angle que fait cette tangente avec une direction fixe satisfait à la condition de Hölder suivante:

$$|\delta_{Q Q_1}| \leqq \text{const}\, r_{Q Q_1}^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha \leqq 1$$

où $\delta_{Q Q_1}$ désigne l'angle que font les tangentes aux deux points arbitraires Q et Q_1 de la frontière C.

II. La fonction donnée $g(t)$ est définie et continue dans l'intervalle $0<t\leqq T$ et satisfait aux inégalités:

$$|g(t)-g(t_1)|\leqq k_g|t-t_1|^{\beta'},\qquad \tfrac{1}{2}<\beta'\leq 1,$$
$$0<m_g\leqq|g(t)|\leqq M_g.$$

III. La fonction donnée $G(P,t)$ est définie et continue en tout point $P\in C$ et pour $0<t\leqq T$, possède la dérivée par rapport à la variable t, vérifiant la condition

$$|G'_t(P,t)-G'_t(P_1,t)|\leqq k_G\, r^{\beta}_{PP_1},\qquad 0<\beta\leqq\alpha.$$

IV. La fonction connue $f(A)$, donnée par la formule $(3')$, est continue en tout point $A\in D+C$, possède les dérivées deuxièmes continues, vérifiant la condition de Hölder dans le domaine $D+C$. Ces dérivées sont bornées dans le domaine $D+C$.

On admet de même:

$$\frac{df(P)}{dn_P}=G(P,0).$$

V. La fonction donnée $\varphi(A,t)$ définie dans la région $[A\in D,\ t\in(0,T)]$ est continue par rapport à la variable t et vérifie la condition de Hölder par rapport au point A. Elle est bornée dans la région citée.

Introduisons deux nouvelles fonctions inconnues $\zeta(P,t)$ et $\chi(P,t)$ liées avec la fonction donnée $g(t)$ par l'éqalité:

$$\zeta(P,t)+M=\chi(P,t)\cdot[g(t)+M_1]\tag{4}$$

où $M_1>\sup|g|$, M est une constante positive que l'on va préciser plus tard. En s'appuyant sur notre travail [2] et [3], nous allons chercher la fonction inconnue $\psi(A,t)$, vérifiant l'équation (1) et les conditions (2) et (3) sous la forme d'une somme des potentiels suivants:

$$\begin{aligned}\psi(A,t)=-\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D\omega(A,t;B,\tau)\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B\,d\tau+\psi_0(A,t)+\\+\int_0^t\int_C\omega(A,t;Q,\tau)\,\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\int_0^t\int_C\frac{d\omega(A,t;Q,\tau)}{dn_Q}\zeta(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau\end{aligned}\tag{5}$$

où la fonction connue $\psi_0(A,t)$ est donnée par l'expression:

$$\psi_0(A,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{D'}\frac{1}{t}e^{-\frac{r^2_{AB}}{4\nu t}}f(B)\,d\sigma_B-\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D\omega(A,t;B,\tau)\,\varphi(B,\tau)\,d\sigma_B\,d\tau\tag{6}$$

où D' désigne un domaine obtenu par le prolongement du domaine D à l'intérieur des domaines limités par les courbes $C_1,\ldots,C_p$. On conserve dans ce prolongement les propriétés admises pour la fonction f.

D'après les propriétés limites du potentiel de simple et de double couche, discutées dans le travail [2] et en tenant compte des conditions (2), nous demandons que les fonctions inconnues $\mu(Q,\tau)$, $\zeta(Q,\tau)$ vérifient les équations intégrales

$$\begin{aligned}
&\frac{M_1\cdot\chi(P,t)-M-\zeta(P,t)}{\chi(P,t)}+\pi\int_0^t\zeta(P,\tau)\,d\tau\\
&-\int_0^t\int_C\frac{d\omega}{dn_Q}\zeta(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau-\int_0^t\int_C\omega(P,t;Q,\tau)\,\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau+\\
&+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D\omega(P,t;B,\tau)\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma\,d\tau-\psi_0(P,t)\\
&-\pi\int_0^t\mu(P,\tau)\,d\tau+\int_0^t\int_C\frac{d\omega}{dn_P}\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau\\
&=-\frac{d}{dn_P}\int_0^t\int_C\frac{d\omega}{dn_Q}\,\zeta(Q,\tau)\,dl\,d\tau+\\
&+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D\frac{d\omega}{dn_P}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y_B}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_B}-\frac{\partial\psi}{\partial x_B}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y_B}\right]d\sigma_B\,d\tau-\frac{d\psi_0(P,t)}{dn_P}+G(P,t)
\end{aligned}\tag{7}$$

(supposition faite que la fonction $\chi(P,t)$ n'est pas nulle).

Les équations (4), (5), (7) forment un système de quatre équations intégro-différentielles, non-linéaires, à forte singularité, avec les fonctions inconnues $\psi(A),t)$, $\zeta(P,t)$, $\chi(P,t)$, $\mu(P,t)$. Pour résoudre le système d'équations (4), (5), (7) étudions le système auxiliaire suivant:

$$\begin{aligned}
u(A,t)&=\widehat{\Omega}_1(A,t;u,v,w,z,\zeta,\mu)\\
v(A,t)&=\widehat{\Omega}_2(A,t;u,v,w,z,\zeta,\mu)\\
w(A,t)&=\widehat{\Omega}_3(A,t;u,v,w,z,\zeta,\mu)\\
z(A,t)&=\widehat{\Omega}_4(A,t;u,v,w,z,\zeta,\mu)
\end{aligned}\tag{8}$$

$$-\zeta(P,t)+\pi\chi(P,t)\int_0^t\zeta(P,\tau)\,d\tau=\chi(P,t)\,\widehat{\Omega}_5(P,t;u,v,w,z,\zeta,\mu)-\chi(P,t)\,M_1+M$$

$$-\mu(P,t)+\frac{1}{\pi}\int_0^t\int_C\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{d\omega}{dn_P}\right]\mu(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau=\frac{1}{\pi}\widehat{\Omega}_6(P,t;u,v,w,z,\zeta)$$

$$\chi(P,t)=[\zeta(P,t)+M]/[g(t)+M_1]$$

où nous avons posé:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Omega}_1 = &- \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_D \frac{\partial \omega}{\partial x} [v z - u w]_B \, d\sigma_B \, d\tau + \\
&+ \int_0^t \int_C \frac{\partial \omega}{\partial x} \mu(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau + \int_0^t \int_C \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\omega}{dn_Q} \right) \zeta(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \\
\widehat{\Omega}_2 = &- \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_D \frac{\partial \omega}{\partial y} [v z - u w]_B \, d\sigma_B \, d\tau + \\
&+ \int_0^t \int_C \frac{\partial \omega}{\partial y} \mu(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau + \int_0^t \int_C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\omega}{dn_Q} \right) \zeta(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \\
\widehat{\Omega}_3 = &- \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_D \frac{\partial \Delta \omega}{\partial x} [v z - u w]_B \, d\sigma_B \, d\tau + \\
&+ \int_0^t \int_C \frac{\partial \Delta \omega}{\partial x} \mu(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau + \int_0^t \int_C \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \frac{d\omega}{dn_Q} \right) \zeta(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau + \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} \\
\widehat{\Omega}_4 = &- \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_D \frac{\partial \Delta \omega}{\partial y} [v z - u w]_B \, d\sigma_B \, d\tau + \\
&+ \int_0^t \int_C \frac{\partial \Delta \omega}{\partial y} \mu(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau + \int_0^t \int_C \frac{\partial}{\partial y} \left(\Delta \frac{d\omega}{dn_Q} \right) \zeta(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau + \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} \\
\widehat{\Omega}_5 = &- \int_0^t \int_C \frac{d\omega}{dn_Q} \zeta(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau - \\
&- \int_0^t \int_C \omega \, \mu(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_D \omega [v z - u w]_B \, d\sigma_B \, d\tau - \psi_0 \\
\widehat{\Omega}_6 = &- \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d}{dn_P} \int_0^t \int_C \frac{d\omega}{dn_Q} \zeta(Q,\tau) \, dl_Q \, d\tau \right] + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\omega}{dn_P} \right) [v z - u w]_B \, d\sigma_B \, d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\psi_0}{dn_P} \right) + \frac{\partial}{\partial t} [G(P,t)].
\end{aligned} \tag{9}$$

Le système d'équations (8) se compose de 7 équations intégrales aux fortes singularités, avec 7 fonctions inconnues $u(A,t)$, $v(A,t)$, $w(A,t)$, $z(A,t)$, $\zeta(P,t)$, $\mu(P,t)$, $\chi(P,t)$.

Nous allons résoudre ce systéme par la méthode topologique, en appliquant le théorème de J. Schauder relatif au point invariant de la transformation fonctionnelle [4], de la façon indiquée par W. Porgorzelski dans le travail [1]. Considerons donc un espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes de 7 fonctions réelles $U[u, v, w, z, \zeta, \mu, \chi]$ déterminées dans le domaine $[A \in D+C, 0 < t \leqq T]$ ou $[P \in C, 0 < t \leqq T]$, où ces fonctions sont toutes continues dans les domaines cités, et de plus, les fonctions ζ et χ possèdent les dérivées par rapport

à l'arc, continues dans le domaine $[P \in C, 0 < t \leqq T]$. Les fonctions $u, v, w, z, \zeta, \mu, \chi$, $d\zeta/dl$, $d\chi/dl$ vérifient les inégalités:

$$r_{A_0A}^{-\gamma} t^{\delta} |u(A,t)| < \infty, \quad r_{A_0A}^{-\gamma} t^{\delta} |v(A,t)| < \infty, \quad r_{A_0A}^{-\gamma} t^{\delta+\lambda'} |w(A,t)| < \infty,$$

$$r_{A_0A}^{-\gamma} t^{\delta+\lambda'} |z(A,t)| < \infty, \; t^{\delta} |\zeta(P,t)| < \infty, \; t^{\delta} |\chi(P,t)| < \infty, \; t^{\delta+\lambda'} |\mu(P,t)| < \infty, \tag{10}$$

$$t^{\delta} \left|\frac{d\zeta}{dl}\right| < \infty, \quad t^{\delta} \left|\frac{d\chi}{dl}\right| < \infty, \quad \text{où} \quad \delta > 0, \quad \gamma > 0,$$

A_0 étant un point à l'intérieur d'une des courbes $C_1, \ldots, C_p$. On définit les opérations linéaires dans l'espace Λ par les relations

$$[u, v, w, z, \zeta, \mu, \chi] + [u_1, v_1, w_1, z_1, \zeta_1, \mu_1, \chi_1]$$
$$= [u + u_1, v + v_1, w + w_1, z + z_1, \zeta + \zeta_1, \mu + \mu_1, \chi + \chi_1]$$
$$m[u, v, w, z, \zeta, \mu, \chi] = [mu, mv, mw, mz, m\zeta, m\mu, m\chi].$$

On définit la norme d'un point $U[u, v, w, z, \zeta, \mu, \chi]$ par la formule:

$$\begin{aligned} \|U\| = & \sup[r_{A_0A}^{-\gamma} t^{\delta} |u(A,t)|] + \sup[r_{A_0A}^{-\gamma} t^{\delta} |v(A,t)|] + \sup[r_{A_0A}^{-\gamma} t^{\delta+\lambda'} |w(A,t)|] + \\ & + \sup[r_{A_0A}^{-\gamma} t^{\delta+\gamma'} |z(A,t)|] + \sup[t^{\delta} |\zeta(P,t)|] + \sup[t^{\delta} |\chi(P,t)|] + \\ & + \sup[t^{\delta+\lambda'} |\mu(P,t)|] + \sup\left[t^{\delta}\left|\frac{d\zeta}{dl}\right|\right] + \sup\left[t^{\delta}\left|\frac{d\chi}{dl}\right|\right] \end{aligned} \tag{11}$$

où

$$\tfrac{1}{2} < \lambda' \leqq 1, \quad \delta > 0, \quad \gamma > 0 \quad (\lambda = \max(\lambda_*, \lambda'_*) \text{ du travail [2]}).$$

On définit la distance de deux points U et U' par la formule

$$\delta(U, U') = \|U - U'\|. \tag{11'}$$

L'espace Λ est linéaire et normé; en outre on peut démontrer qu'il est complet, c'est à dire que la condition de Cauchy est à la fois nécessaire et suffisante pour la convergence d'une suite arbitraire de points de l'espace Λ au sens de la norme (11). L'espace Λ est donc un espace de Banach.

Considérons maintenant dans l'espace Λ l'ensemble E de tous les points $U[u, v, w, z, \zeta, \mu, \chi]$ satisfaisant aux conditions:

$$\begin{aligned} & |u(A,t)| \leqq R, \quad |v(A,t)| \leqq R, \quad t^{\lambda'} |w(A,t)| \leqq R, \quad t^{\lambda'} |z(A,t)| \leqq R, \\ & |\zeta(P,t)| \leqq \varrho_1 < M, \quad \left|\frac{d\zeta}{dl}\right| \leqq \tilde{\varrho}_1, \quad t^{\lambda'} |\mu| \leqq \varrho_2, \quad 0 < \varrho_3' \leqq \chi \leqq \varrho_3, \quad \left|\frac{d\chi}{dl}\right| \leqq \tilde{\varrho}_3, \\ & |\zeta(P,t) - \zeta(P,t_1)| \leqq \varkappa_1' |t - t_1|^{\beta'}, \quad \left|\frac{d\zeta(P,t)}{dl} - \frac{d\zeta(P_1,t)}{dl}\right| \leqq \tilde{\varkappa}_1 r_{PP_1}^{\beta}, \\ & t^{\lambda'} |\mu(P,t) - \mu(P_1,t)| \leqq \varkappa_2 r_{PP_1}^{\beta}, \\ & |\chi(P,t) - \chi(P,t_1)| \leqq \varkappa_3' |t - t_1|^{\beta'}, \quad \left|\frac{d\chi(P,t)}{dl} - \frac{d\chi(P_1,t)}{dl}\right| \leqq \tilde{\varkappa}_3 r_{PP_1}^{\beta} \end{aligned} \tag{12}$$

où β est un exposant positif arbitrairement choisi, mais tel qu'on ait $\beta \leqq \alpha$ (α étant un exposant de la supposition I), β' est un exposant arbitrairement choisi de l'intervalle $(\frac{1}{2}, 1)$. Les constantes positives $R, \varrho_1, \tilde{\varrho}_1, \varrho_2, \tilde{\varrho}_3, \varkappa_1', \tilde{\varkappa}_1, \varkappa_2, \varkappa_3', \tilde{\varkappa}_3, \varrho_3'$ sont arbitrairement choisies, mais doivent vérifier les inégalités que nous allons préciser plus tard. On demande seulement que $\dfrac{\varrho_3 + \varrho_3'}{2} > \dfrac{M}{M_1}$ et $\varrho_3' < \dfrac{M}{M_1}$.

L'ensemble E est évidemment fermé, puisque les fonctions limites des suites uniformément convergentes des fonctions $u(A,t)$, $v(A,t)$, $w(A,t)$, $z(A,t)$, $\zeta(P,t)$, $\mu(P,t)$, $\chi(P,t)$ vérifiant les conditions (12) vérifient aussi ces conditions.

L'ensemble E est en outre convexe; en effet, si $[u, v, w, z, \zeta, \mu, \chi]$ et $[u_1, v_1, w_1, z_1, \zeta_1, \mu_1, \chi_1]$ sont les deux points vérifiant les inégalités (12), alors les fonctions:

$$(1-m)\,u + m u_1, \qquad (1-m)\,v + m v_1, \qquad (1-m)\,w + m w_1, \qquad (1-m)\,z + m z_1,$$
$$(1-m)\,\zeta + m\zeta_1, \qquad (1-m)\,\mu + m\mu_1, \qquad (1-m)\,\chi + m\chi_1,$$

vérifient aussi ces conditions, si le nombre réel m varie dans l'intervalle $(0, 1)$; cela veut dire que tous points du segment rectiligne joignant les points U et U_1 dans l'ensemble E, appartiennent aussi à cet ensemble.

Transformons maintenant l'ensemble E en faisant correspondre à tout point $U[u, v, w, z, \zeta, \mu, \chi]$ de cet ensemble, le point $\bar{U}[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}, \bar{\zeta}, \bar{\mu}, \bar{\chi}]$ déterminé par les relations fonctionnelles:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(A,t) &= \hat{\Omega}_1(A,t; u, v, w, z, \zeta, \mu),\\
\bar{v}(A,t) &= \hat{\Omega}_2(A,t; u, v, w, z, \zeta, \mu),\\
\bar{w}(A,t) &= \hat{\Omega}_3(A,t; u, v, w, z, \zeta, \mu),\\
\bar{z}(A,t) &= \hat{\Omega}_4(A,t; u, v, w, z, \zeta, \mu),
\end{aligned} \tag{13}$$
$$-\bar{\zeta}(P,t) + \pi\chi(P,t)\int_0^t \bar{\zeta}(P,\tau)\,d\tau = \chi(P,t)\,\hat{\Omega}_5(P,t; u, v, w, z, \zeta, \mu) - \chi(P,t)\,M_1 + M,$$
$$-\bar{\mu}(P,t) + \frac{1}{\pi}\int_0^t\!\!\int_C \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{d\omega}{dn_P}\right]\bar{\mu}(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau = \frac{1}{\pi}\,\hat{\Omega}_6(P,t; u, v, w, z, \zeta),$$
$$\bar{\chi}(P,t) = \frac{\zeta + M}{g + M_1}.$$

Nous allons démontrer que ces relations déterminent un point $\bar{U}[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}, \bar{\zeta}, \bar{\mu}, \bar{\chi}]$ de l'espace Λ.

En effet, d'aprés les études du travail [2] et [3], les quatre premières équations du système (13) fournissent les fonctions $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}$, continues dans la région fermée $[D+C, (0, T)]$, en traitant les valeurs limites de ces fonctions si $A \to P$, comme les valeurs correspondant aux points P de la frontière C.

La $5^{\text{ième}}$ équation du système (13) a la forme d'une équation intégrale de Volterra et possède la solution unique de la forme:

$$\bar{\zeta}(P,t) = \chi(P,t)\,\hat{\Omega}_5 - \pi\chi^2(P,t)\int_0^t e^{-\pi\int_\tau^t \chi(P,s)\,ds}\,\hat{\Omega}_5\,d\tau + \tilde{M}(P,t) \tag{14}$$

où la fonction $\hat{\Omega}_5$ est bornée et intégrable dans le domaine

$$[D+C,\ 0 \leqq t \leqq T], \text{ et } \tilde{M}(P,t) = -M + M_1\chi + \pi\chi\int_0^t e^{-\pi\int_\tau^t \chi(P,s)\,ds}\,[M - M_1\chi]\,d\tau.$$

Remarquons d'abord, que tous les termes du membre droit de la $5^{\text{ième}}$ équation du système (13) possèdent la dérivée par rapport à la variable t, ce qui résulte des théorèmes 5, 12 du travail [2], du théorème 7 du travail [1], et de l'expression (23) du travail [3]. Il en résulte que la fonction $\bar{\zeta}$, définie par la $5^{\text{ième}}$ équation

du système (13) satisfait à la condition de Hölder par rapport à la variable t, avec l'exposant β', admis pour la fonction χ. Remarquons de même, que tous les termes du membre droit de la $5^{\text{ième}}$ équation du système (13) possèdent la dérivée par rapport à l'arc vérifiant la condition de Hölder par rapport au point P, avec l'exposant β arbitrairement inférieur à l'exposant α (supp. I). Cette propriété résulte pour la première intégrale

$$\int_0^t \int_C \frac{d\omega}{dn_Q} \zeta(Q, \tau)\, dl_Q\, d\tau$$

du théorème 5 du travail [3], et pour la seconde intégrale

$$\int_0^t \int_C \omega(A, t;\, Q, \tau)\, \mu(Q, \tau)\, dl_Q\, d\tau$$

des théorèmes 9 et 10 du travail [2].

La preuve que l'intégrale

$$\int_0^t \iint_D \omega(A, t;\, B, \tau)\, [v\, z - u\, w]_B\, d\sigma_B\, d\tau$$

et la fonction donnée ψ_0 possèdent la même propriété, résulte des théorèmes de W. Pogorzelski, donnés dans le traivail [1]. En tenant compte de la même supposition admise pour la fonction $\chi(P, t)$ nous pouvons constater que la solution $\bar{\zeta}$ de la $5^{\text{ième}}$ équation du système (13) possède la dérivée par rapport à l'arc, vérifiant la condition de Hölder avec l'exposant $\beta \leqq \alpha$.

Étudions maintenant les propriétés de la solution de la $6^{\text{ième}}$ équation du système (13). Cette équation a la forme d'une équation intégrale de Volterra à singularité faible et possède la solution unique continue de la forme:

$$\bar{\mu}(P, t) = -\frac{1}{\pi} \hat{\Omega}_6 - \frac{1}{\pi^2} \int_0^t \int_C \mathfrak{N}(P, t;\, Q, \tau)\, \hat{\Omega}_6\, dl_Q\, d\tau \tag{15}$$

où le noyau $\mathfrak{N}(P, t;\, Q, \tau)$ est une fonction déterminée et la fonction donnée $\hat{\Omega}_6$ est bornée et intégrable dans le domaine $[D + C,\ 0 \leqq t \leqq T]$.

Nous allons démontrer que tous les termes du membre droit de la $6^{\text{ième}}$ équation du système (13) satisfont à la condition de Hölder par rapport aux coordonnées du point P, avec l'exposant β. Pour la première intégrale

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d}{dn_P} \int_0^t \int_C \frac{d\omega}{dn_Q} \zeta(Q, \tau)\, dl_Q\, d\tau \right]$$

cette propriété résulte du théorème 9 du travail [3].

L'intégrale

$$\int_0^t \iint_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\omega}{dn_P} \right) [v\, z - u\, w]_B\, d\sigma_B\, d\tau$$

possède la même propriété, ce que l'on peut démontrer de la même façon que dans le théorème 7 du travail [1].

Quant à la fonction donnée $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\psi_0}{dn_P}\right)$ cela résulte des suppositions admises pour la fonction f, ce que l'on peut montrer sans peine par le calcul classique. En s'appuyant sur la continuité évidente de la fonction $\bar{\mu}$, nous pouvons constater que l'intégrale du membre gauche de la 6ième équation du système (13), comme le potentiel de double couche pour l'équation de chaleur, satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant arbitrairement inférieur à l'exposant α. Nous constatons donc que la fonction $\bar{\mu}$ définie par la 6ième équation du système (13) satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant β.

La fonction $\bar{\chi}(P, t)$ de la 7ième équation du système (13) satisfait à la condition de Hölder par rapport à la variable t avec l'exposant β', et possède la dérivée par rapport à l'arc, satisfaisant à la condition de Hölder par rapport au point P avec l'exposant β, ce qui résulte des propriétés de la fonction ζ et g. Evidemment $\bar{\chi}(P, t) > 0$ (remarque faite que $\zeta + M > 0$, où $M > \varrho_1 \geqq \sup|\zeta|$). Le point transformé $\bar{U}[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}, \bar{\zeta}, \bar{\mu}, \bar{\chi}]$ appartient donc à l'espace Λ.

Cherchons maintenant la condition pour que le point transformé $\bar{U}[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}, \bar{\zeta}, \bar{\mu}, \bar{\chi}]$ fasse partie de l'ensemble E.

Remarquons d'abord que les fonctions u, v, w, z, d'après les quatre premières équations du système (13), d'après les inégalités (12) et d'après les inégalités (7), (19), (32), (36), (53), (69) du travail [3] satisfont aux conditions:

$$|\bar{u}| \leqq \frac{R^2}{2\pi} K_1 t^{\frac{1}{2}\lambda+1-\lambda'} + k_1'(\varrho_2 + \varkappa_2)\, t^{1-\lambda'} + k_4'(t^{1-\lambda}\varrho_1 + t\tilde{\varrho}_1 + t\tilde{\varkappa}_1) + L_1,$$

$$|\bar{v}| \leqq \frac{R^2}{2\pi} K_1 t^{\frac{1}{2}\lambda+1-\lambda'} + k_1'(\varrho_2 + \varkappa_2)\, t^{1-\lambda'} + k_4'(t^{1-\lambda}\varrho_1 + t\tilde{\varrho}_1 + t\tilde{\varkappa}_1) + L_1, \tag{16}$$

$$|\bar{w}| \leqq \frac{R^2}{2\pi} K_3 t^{1-\lambda-\lambda'} + k_3'(\varrho_2 t^{1-\lambda_1-\lambda'} + \varkappa_2 t^{1-\lambda_2-\lambda'}) + k_5'(t^{1-\lambda}\varkappa_1 + \tilde{\varkappa}_1 + \tilde{\varrho}_1 + \varrho_1 t^{-\lambda_*}) + L_2,$$

$$|\bar{z}| \leqq \frac{R^2}{2\pi} K_3 t^{1-\lambda-\lambda'} + k_3'(\varrho_2 t^{1-\lambda_1-\lambda'} + \varkappa_2 t^{1-\lambda_2-\lambda'}) + k_5'(t^{1-\lambda}\varkappa_1 + \tilde{\varkappa}_1 + \tilde{\varrho}_1 + \varrho_1 t^{-\lambda_*}) + L_2,$$

où

$$L_1 = \sup|(\psi_0)_A'|; \qquad L_2 = \sup|(\Delta\psi_0)_A'|; \tag{17}$$

Cherchons maintenant la limitation de la fonction ζ. D'après la 5ième équation du système (13), d'après les inégalités (5), (39) du travail [3] et l'inégalité (43) du travail (2), nous aurons:

$$|\bar{\zeta}| \leqq \varrho_3(1 + \pi\varrho_3 t)\sup|\hat{\Omega}_5| + (-M + M_1\varrho_3) + \pi\varrho_3 t(-M + M_1\varrho_3); \tag{18}$$

où

$$\sup|\hat{\Omega}_5| = \frac{R^2}{2\pi} K_0 t^{\frac{1}{2}\lambda+1-\lambda'} + k_0 t^{\frac{1}{2}\lambda+1-\lambda'} + k_1^{\frac{1}{2}\lambda+1}\varrho_1 + L_3 \tag{19}$$

$$L_3 = \sup|\psi_0|$$

$(-M + M_1\varrho_3)$ étant la borne supérieure positive de la différence $|M - \chi(P, t) M_1|$ dans le cas supposé $(\varrho_3 + \varrho_3')/2 > \frac{M}{M_1}$, $\varrho_3' < \frac{M}{M_1}$.

La fonction $\bar{\zeta}$ d'après les inégalités (12) de notre travail, et d'après les inégalités (65) du travail [2], et (16), (25), (38), (56) du travail [3], satisfait à la condition de Hölder:

$$|\bar{\zeta}(P, t) - \bar{\zeta}(P, t_1)| \leqq \{\pi\varrho_3 \sup|\bar{\zeta}| + \pi\varkappa_3' \sup|\bar{\zeta}|\, t + M_1\varkappa_3' + \varkappa_3' \sup|\hat{\Omega}_5| + \varrho_3 H'(\hat{\Omega}_5)\}\, |t - t_1|^{\beta'} \tag{20}$$

où nous avons posé:

$$H'(\widehat{\Omega}_5) = k_2 t^{1-\lambda} \varrho_2 + k_3 \varrho_1 t^{\frac{1}{2}(1-\vartheta)\alpha} + \frac{R^2}{2\pi} K_2 t^{1-\lambda-\lambda'} + L_4' \tag{21}$$

L_4' étant le coëfficient de Hölder de la fonction ψ_0. En outre la fonction $\bar{\zeta}$ possède la dérivée par rapport à l'arc qui, d'après les inégalités (12), les inégalités (64) du travail [2] et les inégalités 7, 52 du travail [3], possède la limitation

$$\left|\frac{d\bar{\zeta}}{dl}\right| \leqq \pi \tilde{\varrho}_3 \sup|\bar{\zeta}|\, t + \pi\, \varrho_3 \sup\left|\frac{d\bar{\zeta}}{dl}\right| t + \tilde{\varrho}_3 \sup|\widehat{\Omega}_5| + \varrho_3 \sup\left|\frac{d\widehat{\Omega}_5}{dl}\right| + M_1 \tilde{\varrho}_3 \tag{22}$$

où l'on a posé

$$\sup\left|\frac{d}{dl}\,\widehat{\Omega}_5\right| = \tilde{k}_1(\varrho_2+\varkappa_2)\, t^{\frac{1}{2}\lambda+1-\lambda'} + \tilde{k}_4(t^{1-\lambda}+\varkappa_1 t) + \frac{R^2}{2\pi} K_1 t^{\frac{1}{2}\lambda+1-\lambda'} + L_5,$$

$$L_5 = \sup\left|\frac{d}{dl}\,\psi_0\right|. \tag{23}$$

La dérivée $\frac{d\bar{\zeta}}{dl}$ satisfait à la condition de Hölder suivante (d'après (12) et (58) du travail [2], (9), (50) du travail [3]):

$$\left|\frac{d\bar{\zeta}(P,t)}{dl} - \frac{d\bar{\zeta}(P_1,t)}{dl}\right| \leqq \Big\{\pi\Big[\tilde{\varkappa}_3 \sup|\bar{\zeta}|\, t + \varrho_3 H\left(\frac{d\bar{\zeta}}{dl}\right) t\Big] + \tilde{\varrho}_3 \sup\left|\frac{d\bar{\zeta}}{dl}\right| t + \varrho_3 \tilde{\varrho}_1 t +$$
$$+ \tilde{\varkappa}_3 \sup|\widehat{\Omega}_5| + \tilde{\varrho}_3 H(\widehat{\Omega}_5) + M_1 \tilde{\varkappa}_3 + \tilde{\varrho}_3 \sup\left|\frac{d}{dl}\,\widehat{\Omega}_5\right| + \tilde{\varrho}_3 H\left(\frac{d}{dl}\,\widehat{\Omega}_5\right)\Big\} r^{\beta}_{PP_1} \tag{24}$$

où l'on a posé

$$H\left(\frac{d}{dl}\,\widehat{\Omega}_5\right) = \tilde{h}_1(\varrho_2+\varkappa_2)\, t^{1-\lambda} + \tilde{h}_4(t^{1-\lambda}\varrho_1 + t\varkappa_1) + \frac{R^2}{2\pi} H_1 t^{\frac{1}{2}\lambda+1-\lambda'} + L_5', \tag{25}$$

L_5' étant le coëfficient de Hölder de la fonction $\frac{d}{dl}\,\psi_0$.

D'après la 6ième équation du système (13), d'après les inégalités (12) de notre travail et les inégalités (68) du travail [3] et (18) du travail [2], nous aurons

$$|\bar{\mu}| \leqq K_{\mathfrak{N}}\, \pi^{-1} \sup|\widehat{\Omega}_6| \tag{26}$$

où l'on a posé

$$K_{\mathfrak{N}} = 1 + \frac{1}{\pi} \sup \int_0^t \int_C |\mathfrak{N}|\, dl_Q\, d\tau,$$

$$\sup|\widehat{\Omega}_6| = k_5[t^{1-\lambda}\varkappa_1' + t^{-\lambda_*}\varrho_1 + \tilde{\varkappa}_1] + \frac{R^2}{2\pi} K_3 t^{1-\lambda-\lambda'} + L_6 + M_G, \tag{27}$$

$$L_6 = \sup, \left|\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{d\psi_0}{dn_P}\right| M_G = \sup|G|.$$

La fonction $\bar{\mu}$ satisfait à la condition de Hölder par rapport au point P avec l'exposant β et d'après les inégalités (12) de ce travail et les inégalités 21 du travail [2] et (55), (67) du travail [3], nous aurons

$$|\bar{\mu}(P,t) - \bar{\mu}(P_1',t)| \leqq \pi^{-1} h_3 \sup|\bar{\mu}|\, t^{\frac{1-\vartheta}{2}\alpha} + \pi^{-1} H(\widehat{\Omega}_6) \tag{28}$$

où l'on a posé

$$H(\widehat{\Omega}_6) = h_5[t^{1-\lambda}\varkappa_1 + t^{-\lambda_*}\varrho_1 + \tilde{\varkappa}_1] + \frac{R^2}{2\pi} H_3 t^{1-\lambda-\lambda'} + L_6' + k_g \tag{29}$$

ou L_6' désigne le coëfficient de Hölder de la fonction $\frac{\partial}{\partial t}\frac{d\psi_0}{dn_P}$. En s'appuyant sur les inégalités (12) et les suppositions II admises pour la fonction g nous aurons de même:

$$|\bar{\chi}| \leqq \frac{\varrho_1+M}{m_g+M_1}, \qquad |\bar{\chi}| \geqq \frac{M-\varrho_1}{M_g+M_1}, \tag{30}$$

$$|\bar{\chi}(P,t)-\bar{\chi}(P,t_1)| \leqq \frac{1}{(m_g+M_1)^2}\left[\varkappa_1'(M_g+M_1)+h_g(\varrho_1+M)\right], \tag{31}$$

$$\left|\frac{d\bar{\chi}}{dl}\right| \leqq \frac{\tilde{\varrho}_1}{m_g+M_1}, \tag{32}$$

$$\left|\frac{d\bar{\chi}(P,t)}{dl}-\frac{d\bar{\chi}(P_1,t)}{dl}\right| \leqq \frac{\tilde{\varkappa}_1}{m_g+M_1}. \tag{33}$$

D'après les inégalités (12) et (16)—(33) nous pouvons affirmer, que l'ensemble transformé $\bar{E}$ fera partie de l'ensemble E, si les constantes du problème vérifient les inégalités:

$$\begin{aligned}
&\frac{R^2}{2\pi}K_1 T^{\frac{1}{2}\lambda+1-\lambda'}+k_1'(\varrho_2+\varkappa_2)T^{1-\lambda'}+k_4'(T^{1-\lambda}\varrho_1+T\tilde{\varrho}_1+T\tilde{\varkappa}_1)+L_1\leqq R,\\
&\frac{R^2}{2\pi}K_3 T^{1-\lambda}+k_3'(T^{1-\lambda_1}\varrho_2+T^{1-\lambda_2}\varkappa_2)+\\
&\qquad\qquad +k_5'(T^{1-\lambda+\lambda'}\varkappa_1+T^{\lambda'-\lambda_*}\varrho_1+T^{\lambda'}\tilde{\varkappa}_1+T^{\lambda'}\tilde{\varrho}_1)+L_2T^{\lambda'}\leqq R,\\
&K\pi^{-1}\sup|\hat{\Omega}_6|\leqq\varrho_2,\\
&\pi^{-1}h_3\sup|\bar{\mu}|\,T^{\frac{1-\vartheta}{2}\alpha}+\pi^{-1}H(\hat{\Omega}_6)\leqq\varkappa_2,\\
&(-M+M_1\varrho_3)+(1+\pi\varrho_3T)\varrho_3\sup|\hat{\Omega}_5|+\pi\varrho_3T(-M+M_1\varrho_3)\leqq\varrho_1,\\
&\frac{M+\varrho_1}{M_1+m_g}\leqq\varrho_3,\\
&M_1\varkappa_3'+\pi\varrho_3^2(1+\pi\varrho_3T)\left(\sup|\hat{\Omega}_5|+M_1\right)+\pi\varkappa_3'\varrho_1T+\varkappa_3'\sup|\hat{\Omega}_5|+\\
&\qquad\qquad +\varrho_3H'(\hat{\Omega}_5)-\pi\varrho_3M(1+\pi\varrho_3T)\leqq\varkappa_1',\\
&\frac{\varkappa_1'(M_g+M_1)+h_g(\varrho_1+M)}{(m_g+M_1)^2}\leqq\varkappa_3',\\
&M_1\tilde{\varrho}_3+\pi\tilde{\varrho}_3\varrho_1T+\pi\varrho_3\tilde{\varrho}_1T+\tilde{\varrho}_3\sup|\hat{\Omega}_5|+\varrho_3\sup\left|\frac{d}{dl}\hat{\Omega}_5\right|\leqq\tilde{\varrho}_1,\\
&\frac{1}{M_1+m_g}\tilde{\varrho}_1\leqq\tilde{\varrho}_3,\\
&M_1\tilde{\varkappa}_3+\pi\tilde{\varkappa}_3\varrho_1T+\pi\varrho_3\tilde{\varkappa}_1T+\tilde{\varkappa}_3\sup|\hat{\Omega}_5|+\tilde{\varrho}_3H(\hat{\Omega}_5)+\tilde{\varrho}_3\varrho_1T+\varrho_3\tilde{\varrho}_1T+\\
&\qquad\qquad +\tilde{\varrho}_3\sup\left|\frac{d\Omega_5}{dl}\right|+\varrho_3H\left(\frac{d}{dl}\hat{\Omega}_5\right)\leqq\tilde{\varkappa}_1,\\
&\frac{1}{M_1+m_g}\tilde{\varkappa}_1\leqq\tilde{\varkappa}_3,\qquad\frac{M-\varrho_1}{M_g+M_1}\geqq\varrho_3'.
\end{aligned}\tag{34}$$

Étudions le système d'inégalités:

$$\begin{aligned}
&L_1<R;\quad \varrho_1<R;\quad K_{\mathfrak{R}}\pi^{-1}(L_6+M_g)<\varrho_2;\quad \pi^{-1}(L_6'+k_g)<\varkappa_2;\\
&-M+\varrho_3(L_3+M_1)<\varrho_1;\quad \frac{1}{M_1+m_g}(\varrho_1+M)\leqq\varrho_3;\\
&(\pi\varrho_3^2+\varkappa_3')(L_3+M_1)+L_4'-\pi M\varrho_3<\varkappa_1';\quad \frac{\varkappa_1'(m_g+M_1)+h_g(\varrho_1+M)}{(m_g+M_1)^2}\leqq\varkappa_3'\\
&\qquad\qquad +\tilde{\varrho}_3(L_3+M_1)+\varrho_3L_5<\tilde{\varrho}_1;\quad \frac{1}{M_1+m_g}\tilde{\varrho}_1\leqq\tilde{\varrho}_3;\\
&\varrho_3L_5'+\tilde{\varkappa}_3(L_3+M_1)+\tilde{\varrho}_3L_5<\tilde{\varkappa}_1;\quad \frac{1}{M_1+m_g}\tilde{\varkappa}_1\leqq\tilde{\varkappa}_3;\quad \frac{M-\varrho_1}{M_g+M_1}\geqq\varrho_3'
\end{aligned}\tag{35}$$

dont les membres gauches sont obtenus par la substitution $T=0$ dans les inégalités (34).

Les quatre premières inégalités (35) seront satisfaites à la condition que les constantes arbitraires R, ϱ_2, $\varkappa_2$, soient *suffisamment grandes*, et la dernière à la condition que ϱ_3' soit suffisamment petite. Les paires des autres inégalités (35) seront satisfaites simultanément, si les constantes arbitraires satisfont aux conditions

$$m_g > L_3 \tag{36}$$

et à la même condition que la constante ϱ_3 soit suffisamment grande et la constante ϱ_3' soit suffisamment petite.

Il s'ensuit que les inégalités (34) seront surement satisfaites *si l'intervalle* $(0, T)$ *de temps est suffisamment petit* et les fonctions $g(t)$ et $f(A)$ sont choisies de façon que l'inégalité (36) soit satisfaite.

Nous en concluons que les fonctions $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}, \bar{\zeta}, \bar{\mu}, \bar{\chi}$, satisferont aux conditions (12) et l'ensemble transformé $\bar{E}$ fera partie de l'ensemble E.

Nous démontrerons maintenant que la transformation (13) est continue dans l'espace Λ. Supposons que $u_n, v_n, w_n, z_n, \zeta_n, \mu_n, \chi_n$ est la suite des éléments de l'ensemble E qui tend vers le point $U[u, v, w, z, \zeta, \mu, \chi]$. Il en résulte que les suites $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}, \{z_n\}, \{\zeta_n\}, \{\mu_n\}, \{\chi_n\}$ tendent uniformément vers les fonctions $u, v, w, z, \zeta, \mu, \chi$. D'après les propriétés connues des intégrales à singularité faible nous pouvons constater que ces intégrales tendent uniformément vers les intégrales analogues des fonctions limites. Les intégrales à singularité forte

$$\begin{gathered} \frac{d}{dn_P}[U_t'(P,t)] = \frac{d}{dn_P}\int_0^t\int_C \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\omega}{dn_Q}\right)\zeta(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau, \\ [\Delta U(A,t)]_A' = \left[\int_0^t\int_C \Delta\,\frac{d\omega}{dn_Q}\,\zeta(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau\right]_A' \end{gathered} \tag{37}$$

possèdent la même propriété, ce qui résulte des études des travaux [2], [3].

Nous en concluons, d'après les propriétés connues des solutions des équations de Volterra, que la suite des points $U_n[u_n, v_n, w_n, z_n, \zeta_n, \mu_n, \chi_n]$ transformée par le système (13), tend uniformément vers le point U. La transformation est donc continue. Il reste à démontrer que l'ensemble transformé est compact. Conformément à la définition, l'ensemble $\bar{E}$ est compact, si de toute suite $\{\bar{U}_m\}$ de ses points on peut extraire une suite partielle $\{\bar{U}_{k_m}\}$ convergente au sens de la norme (11).

Soit donc une suite arbitraire de points $\bar{U}_m[\bar{u}_m, \bar{v}_m, \bar{w}_m, \bar{z}_m, \bar{\zeta}_m, \bar{\mu}_m, \bar{\chi}_m]$ de l'ensemble $\bar{E}$. Les fonctions $\bar{u}_m, \bar{v}_m, \bar{w}_m, \bar{z}_m, \bar{\zeta}_m, \bar{\mu}_m, \bar{\chi}_m, \frac{d\bar{\zeta}_m}{dl}, \frac{d\bar{\chi}_m}{dl}$, vérifient les inégalités (16), (18), (22), (26), (30), et (33).

Considérons un cercle C_ε de centre A^* et de rayon $R_\varepsilon > L$, A^* étant un point à l'intérieur d'une des courbes C_i et L le diamètre du domaine embrassé par les courbes C, et désignons par D_ε le domaine embrassé par la frontière C et le cercle C_ε. D'après la définition de la norme (11) et les inégalités récemment

citées, nous pouvons choisir le rayon R_ε tellement grand pour qu'on ait

$$\|\overline{U}_m\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{38}$$

si $A \in D - D_\varepsilon$, $0 < t \leqq T$, m quelconque.

Ensuite, au nombre ε faisons correspondre un nombre positif t_ε pour qu'on ait

$$\|\overline{U}_m\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{39}$$

si $A \in D$, $0 < t \leqq t_\varepsilon$.

Le cercle C_ε et l'intervalle $(0, t_\varepsilon)$ étant fixés, il est facile de démontrer que toutes les fonctions $\overline{u}_m, \overline{v}_m, \overline{w}_m, \overline{z}_m, \overline{\zeta}_m, \overline{\mu}_m, \overline{\chi}_m, \dfrac{d\overline{\zeta}_m}{dl}, \dfrac{d\overline{\chi}}{dl_m}$ sont également continues et également bornées dans la région $[A \in D_\varepsilon, t_\varepsilon \leq t \leq T]$. Donc, d'après le théorème connu d'Arzelà, on peut de la suite $\{\overline{U}_m\}$ extraire une suite partielle $\{\overline{U}_{k_m}\}$ convergente uniformément au sens habituel dans la région: $[A \in D_\varepsilon, t_\varepsilon \leqq t \leqq T]$.

Nous pouvons donc au nombre ε faire correspondre un nombre N_ε tel, qu'on ait dans la région $A \in D_\varepsilon$, $t_\varepsilon \leqq t \leqq T$:

$$\delta(\overline{U}_{k_m} - \overline{U}_{k_s}) = \|\overline{U}_{k_m} - \overline{U}_{k_s}\| < \varepsilon \tag{40}$$

si $m, s > N_\varepsilon$. En somme nous aurons d'après (38) et (39)

$$\delta(\overline{U}_{k_m} - \overline{U}_{k_s}) = \|\overline{U}_{k_m} - \overline{U}_{k_s}\| < \varepsilon$$

si $A \in D$, $0 < t \leqq T$, $m, s > N_\varepsilon$, ce qui confirme la convergence de la suite partielle $\{U_{k_m}\}$ au sens de la norme (11) dans l'espace Λ.

Toutes les conditions du théorème de J. Schauder étant satisfaites, nous pouvons constater que dans l'ensemble E il existe au moins un point $U^*[u^*, v^*, w^*, z^*, \zeta^*, \mu^*, \chi^*]$ invariant relativement à la transformation (13), c'est-à-dire vérifiant le système d'équations intégrales (8).

Considérons maintenant la fonction $\psi^*(A, t)$, déterminée dans la région $[A \in D + C, 0 \leqq t \leqq T]$ par la formule

$$\begin{aligned} \psi^*(A,t) = &-\frac{1}{4\pi}\int_0^t \iint_D \omega(A,t;B,\tau)\left[v^*(B,\tau)\, z^*(B,\tau) - u^*(B,\tau)\, w^*(B,\tau)\right] d\sigma_B\, d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_C \omega(A,t;Q,\tau)\, \mu^*(Q,\tau)\, dl_Q\, d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_C \frac{d\omega(A,t;Q,\tau)}{dn_Q}\, \zeta^*(Q,\tau)\, dl_Q\, d\tau + \psi_0(A,t). \end{aligned} \tag{41}$$

On voit, d'après les équations (9), que les fonctions $u^*(A, t)$, $v^*(A, t)$, $w^*(A, t)$, $z^*(A, t)$ vérifient les égalités

$$u^*(A,t) = \frac{\partial\psi^*(A,t)}{\partial x}, \qquad v^*(A,t) = \frac{\partial\psi^*(A,t)}{\partial y},$$
$$w^*(A,t) = \frac{\partial\Delta\psi^*(A,t)}{\partial x}, \qquad z^*(A,t) = \frac{\partial\Delta\psi^*(A,t)}{\partial y}.$$

Les fonctions obtenues $\zeta^*(P, t)$ et $\mu^*(P, t)$ vérifient donc le système d'équations

$$\begin{aligned}
&-\zeta^*(P,t)+\chi^*(P,t)\int_0^t \zeta^*(P,\tau)\,d\tau \\
&\quad=\chi^*(P,t)\,\widehat{\Omega}_5(P,t;u^*,v^*,w^*,z^*,\zeta^*,\mu^*)+M-M_1\chi^*(P,t)\\
&\quad=\chi^*(P,t)\,\widehat{\Omega}_5\Big(P,t;\frac{\partial\psi^*}{\partial x},\frac{\partial\psi^*}{\partial y},\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial x},\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial y},\zeta^*,\mu^*\Big)+M-M_1\chi^*(P,t) \qquad (42)\\
&-\mu^*(P,t)+\frac{1}{\pi}\int_0^t\int_C \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{d\omega}{dn_P}\Big)\mu^*(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau\\
&\quad=\frac{1}{\pi}\widehat{\Omega}_6(P,t;u^*,v^*,w^*,z^*,\zeta^*)=\frac{1}{\pi}\widehat{\Omega}_6\Big(P,t;\frac{\partial\psi^*}{\partial x},\frac{\partial\psi^*}{\partial y},\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial x},\frac{\partial\Delta\psi^*}{\partial y},\zeta^*\Big)
\end{aligned}$$

et de même le système d'équations (7). En effet, la seconde équation du système (42) est obtenue par la différentiation de la seconde d'équations (7) par rapport à la variable t et la relation est reversible puisque $\frac{d\psi_0(P)}{dn_P}=0$, grâce à la supposition admise $\frac{df(P)}{dn_P}=G(P,0)$.

Enfin nous pouvons remarquer que la fonction $\chi^*(P, t)$ vérifie l'égalité

$$\chi^*(P,t)=\frac{\zeta^*(P,t)+M}{g(t)+M_1}\,. \qquad (43)$$

Il en résulte que les fonctions $\psi^*(A, t)$, $\zeta^*(P, t)$, $\mu^*(P, t)$, $\chi^*(P, t)$ forment une solution du système d'équations (4), (5), (7).

Nous allons montrer que la fonction obtenue $\psi^*(A, t)$ est une solution de l'équation (1) et qu'elle vérifie les conditions limites (2) et (3). En effet, d'après l'équation (5), nous pouvons constater que la fonction $\psi^*(A, t)$ vérifie la condition initiale (3). Remarquons maintenant que toutes les intégrales des membres droits des quatre premières équations du système (9) satisfont à la condition de Hölder par rapport aux coordonnées du point A (voir [2] et [3]). Nous en tirons que la fonction $(v^*z^*-u^*w^*)$ vérifie la condition de Hölder dans tout domaine borné $D^*\subset D$, et par conséquent la fonction $\psi^*(A, t)$ admet les secondes dérivées en tout point intérieur $A\in D$, alors elle vérifie l'équation donnée (1).

Il est aussi évident, d'après les deux premières inégalités (16), que les fonctions u^* et v^* possédent la propriété limite

$$\lim_{t\to 0} u^*(A,t)=f'_x(A)\,,\qquad \lim_{t\to 0} v^*(A,t)=f'_y(A)$$

puisque les derivées premières de l'intégrale de Poisson-Weierstrass possèdent cette propriété bien connue et les autres intégrales dans $\widehat{\Omega}_1$ et $\widehat{\Omega}_2$ tendent vers zéro si $t\to 0$.

Théorème. Si les fonctions qui figurent dans l'équation (1) et les conditions (2), (3), vérifient les suppositions II, III, IV, et sont choisies de façon que l'inégalité (36) soit satisfaite, si le contour C, limitant le domaine non-borné D vérifie la condition I et si l'intervalle de temps est suffisamment petit, alors il existe au moins une fonction $\psi(A, t)$, qui satisfait à l'équation (1) en tout point $A\in D$ pour $0<t\leqq T$, qui vérifie la condition limite (2) en tout point $P\in C$, pour $0<t<T$, qui vérifie la condition initiale (3) et dont les dérivées $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ tendent vers les valeurs limites $f'_x(A)$ et $f'_y(A)$ conformément, si $t\to 0$.

Au point de vue de l'hydrodynamique nous avons donc démontré qu'il existe dans le domaine non-borné D et dans l'intervalle de temps suffisamment petit un mouvement d'un liquide visqueux, incompressible, dont les composantes du vecteur de vitesse sont données à priori au moment initial et au bord du domaine. Il faut remarquer, que la condition exprimée par l'inégalité (36), concernant les fonctions $g(t)$ et $f(A)$ arbitrairement choisies, ne diminue pas le caractère général du problème de l'hydrodynamique. Il faut remarquer aussi que la solution précédente concerne de même le cas du domaine borné, multiplement connexe.

Corollaire. En s'appuyant sur le théorème précédent et l'expression (41) nous pouvons déduire que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\frac{\partial v_y^0}{\partial x}-\frac{\partial v_x^0}{\partial y} \tag{44}$$

c'est à dire

$$\lim_{t\to 0}\operatorname{rot}_z\vec{v}=\operatorname{rot}_z\vec{v}^0. \tag{44'}$$

En effet, d'après les expressions (1') et (41) nous aurons:

$$\operatorname{rot}_z\vec{v}=-\Delta\psi$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D\Delta\omega(A,t;B,\tau)\,[v^*(B,\tau)\,z^*(B,\tau)-u^*(B,\tau)\,w^*(B,\tau)]\,d\sigma_B\,d\tau+ \tag{45}$$

$$-\int_0^t\int_C\frac{d[\Delta\omega(A,t;Q,\tau)]}{dn}\zeta^*(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau-\int_0^t\int_C\omega(A,t;Q,\tau)\,\mu^*(Q,\tau)\,dl_Q\,d\tau-\Delta\psi_0(A,t).$$

En s'appuyant sur les inégalités (17), (25), (56) du travail [*3*] (remarque faite que $V_t'=\Delta V$, $U_t'=\Delta U$) nous pouvons constater que les intégrales dans l'expression (45) tendent vers zèro si $t\to 0$.

La fonction

$$\begin{aligned}\Delta\psi_0(A,t)=\Delta\left[\frac{1}{4\pi}\iint_{D'}\frac{1}{t}e^{-\frac{r_{AB}^2}{4\nu t}}f(B)\,d\sigma_B\right]-\\-\Delta\left[\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_D(A,t;B,\tau)\,\varphi(B,\tau)\,d\sigma_B\,d\tau\right]\end{aligned} \tag{46}$$

se compose de deux intégrales dont la seconde possède la propriété précédemment citée, la première a la forme du laplacien de l'intégrale de Poisson-Weierstrass. Il est facile de démontrer d'après les suppositions admises pour la fonction $f(A)$ que:

$$\lim_{t\to 0}\left[\Delta\frac{1}{4\pi}\iint_{D'}\frac{1}{t}e^{-\frac{r_{AB}^2}{4\gamma t}}f(B)\,d\sigma_B\right]=\Delta f(A). \tag{47}$$

Nous en concluons enfin que

$$\lim_{t\to 0}\operatorname{rot}_z\vec{v}=\lim_{t\to 0}(-\Delta\psi)=-\Delta f(A)=\operatorname{rot}_z\vec{v}^0 \tag{48}$$

d'où l'on obtient l'égalité (44') ou (44).

Bibliographie

[1] Pogorzelski, W.: Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure; Paris 1959.
[2] Wolska-Bochenek, J.: Propriétés des intégrales d'une équation de l'hydrodynamique du liquide visqueux. Ann. Pol. Math. **7**, 141—171 (1960).
[3] Wolska-Bochenek, J.: Étude des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre dans un domaine illimité et quelques propriétés de leurs dérivées. Arch. Rational Mech. Anal. **7**, 181—195 (1961).
[4] Schauder, J.: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Mathematica **2**, 171—180 (1930).

Institut mathématique de l'académie
polonaise des sciences
Warszawa

(Reçu le 23 novembre 1960)

The Influence of Edges and Corners on Potential Functions of Surface Layers

ROLF LEIS

Communicated by C. MÜLLER

Let S be an analytic, orientable surface in three-dimensional space; let p and q be two points, $r(p, q) = |p - q|$ the distance between p and q, and $\varrho(q)$ a function defined for all $q \in S$. By $\partial/\partial n_q$ we denote the derivative in the normal direction relative to $q \in S$. The potential function of the N-fold layer $\varrho(q)$ is then given by

$$U_N(p) = \int_S \varrho(q) \left(\frac{\partial}{\partial n_q}\right)^N \frac{1}{r(p, q)} \, d S_q.$$

The functions $U_N(p)$ are analytic in the neighborhood of all points p not lying on S. $U_N(p)$ jumps when p crosses S at an interior point. Papers by LIAPOUNOFF, POINCARÉ and E. SCHMIDT (*cf.* [*1*]) deal with these jump relations. They are explicitly stated for potential functions and their derivatives of arbitrary order in a paper by C. MÜLLER [*2*]. While these papers deal only with the behavior of potential functions near an interior point of the surface, for many problems it is of interest to know the behavior of potential functions and their derivatives at points p on the boundary C of the surface S. This behavior will be investigated here. We shall see that boundary points are singularities of these potential functions. The degree of the singularity will be given explicitly.

So as to avoid burdening the exposition with differentiability assumptions, let us assume for the present that the surface S and the layer function S are analytic and that the boundary curve C is piecewise analytic. In the last section, this assumption will be weakened by requiring only differentiability of finite order.

The formalism of differential geometry needed will be given in the first section, where we follow the notations of C. MÜLLER [*2*]. The second section deals with the functions U_0, U_1 and their gradients. In the third section, the singular behavior of the functions U_N and ∇U_N will be reduced to line integrals over the boundary C. These integrals will be discussed in Section 4. Finally, Section 5 weakens the requirements of differentiability.

1. Introduction

Let the orientable surface S be bounded by the piecewise analytic Jordan curve C (consisting of corners and regular points). Let S have the following properties:

1. There exists a coordinate system for every point P of S (a closed domain).

2. P is the origin of the coordinate system.

3. A constant $c>0$ exists such that the part of S lying in the interior of the sphere $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\leqq c$ can be represented in the form $x^3=\Phi(x^1, x^2)$. $\Phi(x^1, x^2)$ is an analytic function for all $(x^1)^2+(x^2)^2<c$.

4. The derivatives $\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}=\Phi_{|1}$, $\Phi_{|2}$ and $\Phi_{|1|2}$ vanish at the origin.

Thus the x^3-axis is normal to S at P; the x^1- and x^2-axes are the directions of principal curvature. For brevity we call this coordinate system a tangent-normal system.

Let $\mathfrak{e}_i$ be the unit vectors in the direction of the coordinate axes;

$$x^1\,\mathfrak{e}_1+x^2\,\mathfrak{e}_2+\Phi(x^1, x^2)\,\mathfrak{e}_3=\mathfrak{f}(x^1, x^2) \tag{1.1}$$

then represents a point of the surface. $\mathfrak{f}$ denotes a vector with the components f^1, f^2, f^3. At the origin we get

$$\mathfrak{f}_{|\mu}\overset{\circ}{=}\mathfrak{e}_\mu;\qquad \mathfrak{f}_{|1|2}=\Phi_{|1|2}\,\mathfrak{e}_3\overset{\circ}{=}0. \tag{1.2}$$

In (1.2) and in the following equations, $\overset{\circ}{=}$ denotes "equal at the origin" (at P). The range of Greek subscripts is 1, 2; of Roman, 1, 2, 3.

Now we introduce a new coordinate system, which we shall call a u-system, by the formula

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{f}(u^1, u^2)+u^3\,\mathfrak{n}(u^1, u^2) \tag{1.3}$$

where $\mathfrak{n}$ denotes the unit normal to the surface. Then we have

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^k}\overset{\circ}{=}\delta^i_k, \tag{1.4}$$

and, with

$$\mathfrak{n}_{|\mu}=-L^\sigma_\mu\,\mathfrak{f}_{|\sigma},\qquad \gamma_{\mu\nu}=(\mathfrak{f}_{|\mu}\,\mathfrak{f}_{|\nu}), \tag{1.5}$$

also

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}&=(\mathfrak{x}_{|\mu}\,\mathfrak{x}_{|\nu})=(\mathfrak{f}_{|\mu}-u^3\,L^\sigma_\mu\,\mathfrak{f}_{|\sigma})\,(\mathfrak{f}_{|\nu}-u^3\,L^\sigma_\nu\,\mathfrak{f}_{|\sigma})\\ &=\gamma_{\mu\nu}-2u^3\,L_{\mu\nu}+(u^3)^2\,L^\sigma_\mu\,L_{\sigma\nu}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Let $2H=k_1+k_2$ be the mean curvature and $K=k_1k_2$ the Gaussian curvature. Then, with

$$L_{11}\overset{\circ}{=}k_1,\qquad L_{22}\overset{\circ}{=}k_2,\qquad L_{12}\overset{\circ}{=}0,\qquad \gamma_{\mu\nu}\overset{\circ}{=}\delta_{\mu\nu}, \tag{1.7}$$

we have

$$g_{\mu\nu}\overset{\circ}{=}\big(1-(u^3)^2\,K\big)\,\gamma_{\mu\nu}-2u^3(1-u^3\,H)\,L_{\mu\nu}. \tag{1.8}$$

Equation (1.8) is a tensor relation valid at the point P. However, the point P is in no way distinguished among surface points; rather, at an arbitrary point of the surface there exists a tangent-normal system and, consequently, a u-system

in which equation (1.8) is valid. Thus (1.8) is valid at every point, and we get

$$(1.9) \qquad g_{\mu\nu} = \left(1 - (u^3)^2 K\right) \gamma_{\mu\nu} - 2u^3 (1 - u^3 H)\, L_{\mu\nu}$$

and

$$(1.10) \qquad g_{33} = (\mathfrak{x}_{|3}\, \mathfrak{x}_{|3}) = \mathfrak{n}^2 = 1\,; \qquad g_{3\mu} = (\mathfrak{x}_{|3}\, \mathfrak{x}_{|\mu}) = \left(\mathfrak{n}\,(\mathfrak{f}_{|\mu} - u^3 L^\sigma_\mu\, \mathfrak{f}_{|\sigma})\right) = 0\,.$$

Let g stand for det g_{ik} and γ for det $\gamma_{\mu\nu}$; then g/γ is an invariant of the surface (u^3 fixed), and we get

$$(1.11) \qquad g \stackrel{\circ}{=} \gamma \left(1 - 2u^3 H + (u^3)^2 K\right)^2$$

or, with

$$(1.12) \qquad G = 1 - 2u^3 H + (u^3)^2 K\,,$$

simply

$$(1.13) \qquad g = \gamma\, G^2.$$

The Delta operator

$$(1.14) \qquad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2$$

is given in the u-system by the formula

$$(1.15) \qquad \Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial}{\partial u^k}$$

or

$$(1.16) \qquad \Delta = \frac{1}{G} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial u^\mu} G \sqrt{\gamma}\, g^{\mu\nu} + \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial u^3} G \frac{\partial}{\partial u^3}\,.$$

For sufficiently small u^3 we have the expansion

$$(1.17) \qquad G\, g^{\mu\nu} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(u^3)^j}{j\,!} S^{\mu\nu}_{(j)}\,,$$

and we write

$$(1.18) \qquad \Delta_j = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial u^\mu} \sqrt{\gamma}\, S^{\mu\nu}_{(j)} \frac{\partial}{\partial u^\nu} \qquad \left(\Delta_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial u^\mu} \sqrt{\gamma}\, \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u^\nu}\right).$$

Thus we get

Lemma 1. *For sufficiently small u^3,*

$$G\Delta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(u^3)^j}{j!} \Delta_j + \frac{\partial}{\partial u^3} G \frac{\partial}{\partial u^3}\,.$$

From Lemma 1, for $u^3 = 0$ and for harmonic functions with

$$(1.19) \qquad \frac{\partial}{\partial u^3} = \frac{\partial}{\partial n} \text{ on } S$$

it follows that

$$(1.20) \qquad \Delta_0 U + \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} - 2H \frac{\partial}{\partial n}\right) U = 0\,.$$

In analogy to Lemma 1, by differention with respect to u^3 we get

Lemma 2. *Let the function U be harmonic in the neighborhood of a point P. Then the derivatives of U satisfy the recurrence relations*

$$0=\left\{\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\Delta_{N-j}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{j}+\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{N+2}-2H(N+1)\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{N+1}+2K\binom{N+1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{N}\right\}U.$$

The Nabla operator

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x^1}e_1+\frac{\partial}{\partial x^2}e_2+\frac{\partial}{\partial x^3}e_3 \tag{1.21}$$

is given in the u-system by the formula

$$\nabla U=g^{ki}\mathfrak{x}_{|i}U_{|k}=g^{\mu\nu}(\mathfrak{f}_{|\nu}+u^3\mathfrak{n}_{|\nu})U_{|\mu}+\mathfrak{n}U_{|3}. \tag{1.22}$$

For small values of u^3 we have the development:

$$g^{\mu\nu}(\mathfrak{f}_{|\nu}+u^3\mathfrak{n}_{|\nu})=g^{\mu\nu}(\delta_\nu^\varrho-u^3L_\nu^\varrho)\mathfrak{f}_{|\varrho}=\mathfrak{f}_{|\varrho}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(u^3)^j}{j!}Q_{(j)}^{\mu\varrho}. \tag{1.23}$$

With the notation

$$\nabla_j=Q_{(j)}^{\mu\nu}\mathfrak{f}_{|\nu}\frac{\partial}{\partial u^\mu}\qquad\left(\nabla_0=\gamma^{\mu\nu}\mathfrak{f}_{|\nu}\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right), \tag{1.24}$$

follows

Lemma 3. *For sufficiently small u^3, we have*

$$\nabla=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(u^3)^j}{j!}\nabla_j+\mathfrak{n}\frac{\partial}{\partial u^3}.$$

Finally, we wish to derive from Gauss' theorem certain formulas which we shall need later on. Let $\mathcal{J}$ be a continuously differentiable function defined on S. Then we get for a sufficiently small surface S' with the boundary C'

$$\begin{aligned}\int_{S'}\nabla_j\mathcal{J}\,dS&=\int_{S'}Q_{(j)}^{\mu\nu}\mathfrak{f}_{|\nu}\mathcal{J}_{|\mu}\sqrt{\gamma}\,du^1du^2\\&=-\int_{S'}\mathcal{J}\frac{\partial}{\partial u^\mu}(Q_{(j)}^{\mu\nu}\mathfrak{f}_{|\nu}\sqrt{\gamma})\,du^1du^2+\int_{C'}\sqrt{\gamma}\,\mathcal{J}\,\mathfrak{f}_{|\nu}(Q_{(j)}^{1\nu}\dot u^2-Q_{(j)}^{2\nu}\dot u^1)\,dc.\end{aligned} \tag{1.25}$$

With

$$\mathfrak{n}_j=\mathfrak{f}_{|\nu}(Q_{(j)}^{1\nu}\dot u^2-Q_{(j)}^{2\nu}\dot u^1)\sqrt{\gamma},\qquad\mathfrak{p}_j=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial u^\mu}(Q_{(j)}^{\mu\nu}\mathfrak{f}_{|\nu}\sqrt{\gamma}), \tag{1.26}$$

we find, after summation over S',

Lemma 4. *Let $\mathcal{J}$ be a continuously differentiable function defined on S. Then we have*

$$\int_S\nabla_j\mathcal{J}\,dS=-\int_S\mathcal{J}\mathfrak{p}_j\,dS+\int_C\mathcal{J}\mathfrak{n}_j\,dc.$$

For $j=0$ we get from Lemma 4

Lemma 4*. *Let $\mathcal{J}$ be a continuously differentiable function defined in S. Then we have*

$$\int_S\nabla_0\mathcal{J}\,dS=-2\int_S\mathfrak{n}H\mathcal{J}\,dS+\int_C\mathfrak{n}_0\mathcal{J}\,dc,$$

where $\mathfrak{n}_0$ is a vector normal to C and orthogonal to $\mathfrak{n}$.

Let $\mathscr{H}$ and $\mathscr{L}$ be twice continuously differentiable functions defined on S. Then we have

$$\begin{aligned}
\int_{S'} \mathscr{H}\, \Delta_j \mathscr{L}\, dS &= \int_{S'} \mathscr{H} \frac{\partial}{\partial u^\mu} \left(\sqrt{\gamma}\, S^{\mu\nu}_{(j)} \mathscr{L}_{|\nu}\right) du^1\, du^2 \\
&= -\int_{S'} \mathscr{H}_{|\mu} \sqrt{\gamma}\, S^{\mu\nu}_{(j)} \mathscr{L}_{|\nu}\, du^1\, du^2 + \int_{C'} \sqrt{\gamma}\, \mathscr{H}\, \mathscr{L}_{|\nu} \left(S^{1\nu}_{(j)} \dot{u}^2 - S^{2\nu}_{(j)} \dot{u}^1\right) dc \\
&= \int_{S'} \mathscr{L}\, \Delta_j \mathscr{H}\, dS + \int_{C'} \mathscr{H} \sqrt{\gamma}\, \mathscr{L}_{|\nu} \left(S^{1\nu}_{(j)} \dot{u}^2 - S^{2\nu}_{(j)} \dot{u}^1\right) dc - \\
&\quad - \int_{C'} \mathscr{L} \sqrt{\gamma}\, \mathscr{H}_{|\mu} \left(S^{\mu 1}_{(j)} \dot{u}^2 - S^{\mu 2}_{(j)} \dot{u}^1\right) dc .
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Since

$$s^\nu_{(j)} = \sqrt{\gamma} \left(S^{1\nu}_{(j)} \dot{u}^2 - S^{2\nu}_{(j)} \dot{u}^1\right), \qquad \mathfrak{s}_j = \mathfrak{s}^\nu_{(j)} \mathfrak{f}_{|\nu}, \qquad \nabla_0 \mathscr{L} = \mathscr{L}_{|\mu} \mathfrak{f}_{|\nu} \gamma^{\mu\nu}, \tag{1.28}$$

we obtain

Lemma 5. *Let the functions $\mathscr{H}$ and $\mathscr{L}$ be twice continuously differentiable on S. Then we have*

$$\int_S \mathscr{H}\, \Delta_j \mathscr{L}\, dS = \int_S \mathscr{L}\, \Delta_j \mathscr{H}\, dS + \int_C \left(\mathscr{H}\, \nabla_0 \mathscr{L} - \mathscr{L}\, \nabla_0 \mathscr{H}\right) \mathfrak{s}_j\, dc ,$$

or, in particular,

Lemma 5*. *Let the functions $\mathscr{H}$ and $\mathscr{L}$ be twice continuously differentiable on S. Then we have*

$$\int_S \mathscr{H}\, \Delta_0 \mathscr{L}\, dS = \int_S \mathscr{L}\, \Delta_0 \mathscr{H}\, dS + \int_C \left(\mathscr{H}\, \mathfrak{n}_0 \nabla_0 \mathscr{L} - \mathscr{L}\, \mathfrak{n}_0 \nabla_0 \mathscr{H}\right) dc .$$

2. The behavior of potential functions arising from single and double layers

The potential function of the single layer $\varrho(q)$, namely,

$$U_0(p) = \int_S \varrho(q) \frac{1}{r(p,q)}\, dS_q , \tag{2.1}$$

is continuous everywhere [1]. The behavior of the potential function of the double layer $\mu(q)$,

$$U_1(p) = \int_S \mu(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \frac{1}{r(p,q)}\, dS_q , \tag{2.2}$$

when p approaches an interior point of the surface S is characterized by the jump relations [1], [2]

$$\begin{aligned}
U_1\big|_{\text{ext.}} &= 2\pi\mu + \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}\, dS \bigg|_{p\in S} \\
U_1\big|_{\text{int.}} &= -2\pi\mu + \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}\, dS \bigg|_{p\in S} .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

The integral

$$\int_S \mu(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(p,q)}\, dS_q \bigg|_{p\in S} \tag{2.4}$$

represents a function continuous for all $p \in S$. Thus $U_1(p)$ is not continuous as p crosses S, but it is bounded for all p.

The gradients of these functions become singular, however, when p approaches a point of the boundary C. To show this, we form, according to Lemma 3, the quantity

$$(2.5)\quad \nabla U_0 = -\int_S \varrho(q)\,\nabla_q \frac{1}{r(p,q)}\,dS_q = -\int_S \varrho\,\mathfrak{n}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,dS - \int_S \varrho\,\nabla_0\,\frac{1}{r}\,dS.$$

From this formula, according to Lemma 4*, we get

$$(2.6)\quad \nabla U_0 = -\int_S \varrho\,\mathfrak{n}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,dS + \int_S (\nabla_0\,\varrho)\,\frac{1}{r}\,dS + 2\int_S \mathfrak{n}\,H\,\varrho\,\frac{1}{r}\,dS - \int_C \mathfrak{n}_0\,\varrho\,\frac{1}{r}\,dc.$$

The line integral in (2.6) becomes logarithmically singular [3], while the other surface integrals are regular. The singularity can be described by the formula [3]

$$(2.7)\quad \int_C \mathfrak{n}_0\,\varrho\,\frac{1}{r}\,dc = -2\mathfrak{n}_0(\mathfrak{y})\,\varrho(\mathfrak{y})\,\lg|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| + O(1) \quad \text{as} \quad |\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| \to 0,$$

where $\mathfrak{x}$ approaches the regular point $\mathfrak{y}$ of C. Thus we get

Theorem 1. *The potential function $U_0(p)$ is regular when p approaches the boundary C, while $\nabla U_0(p)$ becomes logarithmically singular as stated in* (2.6) *and* (2.7).

We shall now discuss $\nabla U_1(p)$ and, in a similar way, get

$$(2.8)\quad \begin{aligned} -\nabla U_1 &= \int_S \mu\,\frac{\partial}{\partial n}\,\nabla_q\,\frac{1}{r(p,q)}\,dS_q = \int_S \mu\,\mathfrak{n}\,\frac{\partial^2}{\partial n^2}\,\frac{1}{r}\,dS + \\ &\quad + \int_S \mu\,\nabla_0\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,dS + \int_S \mu\,\nabla_1\,\frac{1}{r}\,dS. \end{aligned}$$

We discuss the resulting surface integrals individually. According to (1.20) and Lemma 5*, we get

$$(2.9)\quad \begin{aligned} \int_S \mu\,\mathfrak{n}\,\frac{\partial^2}{\partial n^2}\,\frac{1}{r}\,dS &= 2\int_S \mu\,H\,\mathfrak{n}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,dS - \int_S \mu\,\mathfrak{n}\,\Delta_0\,\frac{1}{r}\,dS \\ &= 2\int_S \mu\,H\,\mathfrak{n}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,dS - \int_S (\Delta_0\,\mu\,\mathfrak{n})\,\frac{1}{r}\,dS - \\ &\quad - \int_C \left\{\mu\,\mathfrak{n}\,(\mathfrak{n}_0\,\nabla_0)\,\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,(\mathfrak{n}_0\,\nabla_0)\,\mu\,\mathfrak{n}\right\} dc. \end{aligned}$$

The line integral has a singularity like $1/r$ as p approaches C [3]; explicitly,

$$(2.10)\quad \begin{aligned} &\int_C \left\{\mu\,\mathfrak{n}\,(\mathfrak{n}_0\,\nabla_0)\,\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,(\mathfrak{n}_0\,\nabla_0)\,\mu\,\mathfrak{n}\right\} dc \\ &\quad = \mu\,\mathfrak{n}\,\frac{2\mathfrak{a}\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2} - \left(\mu\,\mathfrak{n}\,\varkappa(\mathfrak{h}\,\mathfrak{a}) - 2(\mathfrak{n}_0\,\nabla_0)\,\mu\,\mathfrak{n}\right)\lg|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| + O(1), \end{aligned}$$

when $\mathfrak{x}$ approaches the regular point $\mathfrak{y}$ of C. $\mathfrak{h}(s)$ and $\mathfrak{b}(s)$ are the normal vectors of C, $\varkappa$ is the curvature; $\mathfrak{n}_0\,\nabla_0 = \mathfrak{a}\,\nabla$.

According to Lemma 4*, for the second integral in (2.8) we get the formula

$$(2.11)\quad \begin{aligned}&\int_S \mu \nabla_0 \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,dS\\ &\quad= -\int_S (\nabla_0\mu)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,dS - 2\int_S \mathfrak{n} H\mu\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,dS + \int_C \mathfrak{n}_0\mu\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,dc.\end{aligned}$$

The line integral in (2.11) also has a singularity like $1/r$; explicitly [3],

$$(2.12)\quad \begin{aligned}\int_C \mu\,\mathfrak{n}_0\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,dc = \mu\,\mathfrak{n}_0(\mathfrak{y})\left\{\frac{2\mathfrak{n}(\mathfrak{y})\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2} - \varkappa(\mathfrak{y})\,(\mathfrak{h}\,\mathfrak{n})\,\lg|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\right\} +\\ +O(1)\quad\text{as}\quad |\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\to 0.\end{aligned}$$

Finally, for the third integral in (2.8), according to Lemma 4, we have

$$(2.13)\quad \int_S \mu \nabla_1 \frac{1}{r}\,dS = -\int_S (\nabla_1\mu)\frac{1}{r}\,dS - \int_S \mu\frac{1}{r}\mathfrak{p}_1\,dS + \int_C \mu\frac{1}{r}\mathfrak{n}_0\,dc.$$

Again the line integral is logarithmically singular:

$$(2.14)\quad \int_C \mu\,\mathfrak{n}_0\frac{1}{r}\,dc = -2\mu\,\mathfrak{n}_0\lg|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| + O(1)\quad\text{as}\quad |\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\to 0.$$

Thus we get

Theorem 2. *The potential function U_1 is bounded as p approaches the boundary C, while ∇U_1 has a singularity like $1/R$ (R being the shortest distance between p and C) as stated in* (2.8—14).

3. The behavior of potential functions of multiple layers

In the last section we discussed the behavior of potential functions of single and double layers and their derivatives. Now we wish to extend these discussions to the potential functions of N-fold layers,

$$(3.1)\quad U_N(p) = \int_S \varrho(q)\left(\frac{\partial}{\partial n_q}\right)^N \frac{1}{r(p,q)}\,dS_q.$$

To do this, first of all we wish to express the operator $(\partial/\partial n)^N$ through lower derivatives. Making the assumption

$$(3.2)\quad \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N = \Omega_N^1 + \Omega_N^2\frac{\partial}{\partial n},$$

by Lemma 2 we get the recursion formula

$$(3.3)\quad \Omega_{N+2}^\mu = 2H(N+1)\,\Omega_{N+1}^\mu - 2K\binom{N+1}{2}\Omega_N - \sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\Delta_{N-j}\Omega_j^\mu$$

with the initial values

$$(3.4)\quad \Omega_0^1 = 1,\quad \Omega_0^2 = 0,\quad \Omega_1^1 = 0,\quad \Omega_1^2 = 1.$$

It follows from (3.3) and (3.4) that the operators Ω_{2N}^1 and Ω_{2N+1}^1 contain derivatives of maximum order $2N$ and that the operators Ω_{2N-1}^2 and Ω_{2N}^2 contain derivatives of maximum order $2N-2$.

Now we form the adjoint operators Φ_N^μ to Ω_N^μ according to

$$(3.5)\qquad \int_S \mathscr{H}\,\Omega_N^\mu\,\mathscr{L}\,dS = \int_S \mathscr{L}\,\Phi_N^\mu\,\mathscr{H}\,dS + \int_C \mathrm{X}_N^\mu(\mathscr{H},\mathscr{L})\,dc$$

where $\mathscr{H}$ and $\mathscr{L}$ denote sufficiently differentiable functions. Since the operators Δ_{N-j} are self-adjoint, for Φ_N^μ we get the recursion formula

$$(3.6)\qquad \Phi_{N+2}^\mu = 2(N+1)\,\Phi_{N+1}^\mu H - 2\binom{N+1}{2}\Phi_N^\mu K - \sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\Phi_j^\mu\,\Delta_{N-j}$$

with the initial values

$$(3.7)\qquad \Phi_0^1 = 1, \qquad \Phi_0^2 = 0, \qquad \Phi_1^1 = 0, \qquad \Phi_1^2 = 1.$$

According to Lemma 5, for the X_N^μ we get

$$(3.8)\qquad \begin{aligned} \mathrm{X}_{N+2}^\mu &= 2(N+1)\,\mathrm{X}_{N+1}^\mu(H\mathscr{H},\mathscr{L}) - 2\binom{N+1}{2}\mathrm{X}_N^\mu(K\mathscr{H},\mathscr{L}) - \\ &- \sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\{[\mathscr{H}\,\nabla_0\Omega_j^\mu\,\mathscr{L} - (\Omega_j^\mu\,\mathscr{L})\,\nabla_0\mathscr{H}]\,\mathfrak{z}_{n-j} + \mathrm{X}_j^\mu(\Delta_{N-j}\mathscr{H},\mathscr{L})\} \end{aligned}$$

with the initial values

$$(3.9)\qquad \mathrm{X}_0^1 = \mathrm{X}_1^1 = \mathrm{X}_0^2 = \mathrm{X}_1^2 = 0.$$

From (3.8) and (3.9) it follows that $\mathrm{X}_{2N}^1(\mathscr{H},\mathscr{L})$ and $\mathrm{X}_{2N+1}^1(\mathscr{H},\mathscr{L})$ contain derivatives of maximum order $2N-1$ with reference to $\mathscr{L}$, and that $\mathrm{X}_{2N-1}^2(\mathscr{H},\mathscr{L})$ and $\mathrm{X}_{2N}^2(\mathscr{H},\mathscr{L})$ contain derivatives of maximum order $2N-3$ with reference to $\mathscr{L}$. $\mathrm{X}_{2N}^\mu(\mathscr{H},\mathscr{L})$ and $\mathrm{X}_{2N+1}^\mu(\mathscr{H},\mathscr{L})$ contain derivatives of maximum order $2N-1$ with reference to $\mathscr{H}$.

Thus we get

Lemma 6. *Let the function $\mathscr{H}$ be analytic and the function $\mathscr{L}$ be harmonic. Then there exist operators Ω_μ^N, Φ_N^μ, X_N^μ, defined by* (3.3, 6, 8), *such that*

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N \mathscr{L} = \left(\Omega_N^1 + \Omega_N^2\frac{\partial}{\partial n}\right)\mathscr{L}$$

and

$$\int_S \mathscr{H}\,\Omega_N^\mu\,\mathscr{L}\,dS = \int_S \mathscr{L}\,\Phi_N^\mu\,\mathscr{H}\,dS + \int_C \mathrm{X}_N^\mu(\mathscr{L},\mathscr{H})\,dc.$$

It follows from Lemma 6 that

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} U_N &= \int_S \varrho\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N\frac{1}{r}\,dS = \int_S \varrho\,\Omega_N^1\frac{1}{r}\,dS + \int_S \varrho\,\Omega_N^2\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,dS \\ &= \int_S (\Phi_N^1\varrho)\frac{1}{r}\,dS + \int_S (\Phi_N^2\varrho)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,dS + \\ &\quad + \int_C \mathrm{X}_N^1\left(\varrho,\frac{1}{r}\right)dc + \int_C \mathrm{X}_N^2\left(\varrho,\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dc. \end{aligned}$$

Thus we have expressed the function U_N through functions of the type U_0 and U_1 and boundary integrals. The line integrals in (3.10) therefore describe the singular

behavior of the functions $U_N(p)$ as p approaches the boundary C. We shall discuss the singular behavior of these integrals in the next section.

For the gradient ∇U_N, according to Lemmas 3 and 4 we get the formula

$$
\begin{aligned}
-\nabla U_N &= \int_S \varrho\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N \nabla \frac{1}{r}\, dS - \int_S \varrho\, \mathfrak{n}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{N+1} \frac{1}{r}\, dS + \sum_{j=0}^{N} \int_S \varrho \nabla_{N-j}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j \frac{1}{r}\, dS \\
&= \int_S \varrho\, \mathfrak{n}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{N+1} \frac{1}{r}\, dS - \sum_{j=0}^{N} \int_S (\nabla_{N-j}\varrho)\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j \frac{1}{r}\, dS - \\
&\quad - \sum_{j=0}^{N}\left\{\int_S \mathfrak{p}_j \varrho\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j \frac{1}{r}\, dS - \int_S \mathfrak{n}_j \varrho\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j \frac{1}{r}\, dc\right\}.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

The surface integrals in (3.11) are again functions of the form U_K. By means of (3.10) we can express their singular behavior in terms of line integrals which we shall discuss in the next paragraph.

4. The singular behavior of potential functions arising from one-dimensional layers

In the last section we expressed the singular behavior of potential functions of surface layers through line integrals over the boundary C of the surface S. We shall now discuss these integrals. As the derivatives with respect to all coordinates u^i occur in the integrands, we shall discuss in particular the integrals

$$V_N = \int_C \varrho\left(\frac{\partial}{\partial c}\right)^N \frac{1}{r}\, dc \tag{4.1}$$

and

$$W_N = \int_C \varrho\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N \frac{1}{r}\, dc, \tag{4.2}$$

where c denotes the arc length and $\mathfrak{n}$ a vector normal to C.

We assumed C to be piecewise analytic, so let us assume that $C = \sum_{i=1}^{k} C_i$, where the C_i are analytic curves. Through partial integration, it follows from (4.1) that

$$V_N = \sum_i \int_{C_i} \varrho\left(\frac{\partial}{\partial c_i}\right)^N \frac{1}{r}\, dc = \sum_i \left\{\left[\varrho\left(\frac{\partial}{\partial c_i}\right)^{N-1} \frac{1}{r}\right]_0^{L_i} - \int_{C_i}\left(\frac{\partial}{\partial c_i}\right)\varrho\left(\frac{\partial}{\partial c_i}\right)^{N-1} \frac{1}{r}\, dc_i\right\} \tag{4.3}$$

or

$$V_N = \sum_i \left\{-\sum_{j=1}^{N}(-1)^j\left[\left(\frac{\partial}{\partial c_i}\right)^{j-1} \varrho\left(\frac{\partial}{\partial c_i}\right)^{N-j} \frac{1}{r}\right]_0^{L_i} + (-1)^N \int_{C_i}\left(\frac{\partial}{\partial c_i}\right)^N \varrho\, \frac{1}{r}\, dc_i\right\}. \tag{4.4}$$

Thus we get [3]

Lemma 7. *The function $V_N(p)$ is logarithmically singular when p approaches C. For $N \geqq 1$ there are additional singularities at the corners of C of the order R^{-N} (R being the distance from p to a corner).*

To discuss the behavior of the functions W_N, we represent the curve C in the neighborhood of an interior point P in a tangent-normal coordinate system in the following way:

1. P is the origin of the coordinate system.

2. A constant $\tau > 0$ exists such that the part of C which lies in the interior of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 \leqq \tau$ can be represented in the form $y = f(x)$, $z = g(x)$. The functions f and g are analytic when $x^2 < \tau$.

3. The derivatives f' and g' vanish at the origin.

4. In P the direction of the normal vector $\mathfrak{n}$ is the direction of the z-axis.

If P is a corner point of C, we can continue the analytic pieces of C over P, so that P again may be considered as an interior point (for each segment separately).

To discuss the function W_1 as $Q(x_0, y_0, z)_0$ approaches the point $P(0, 0, 0)$, we proceed in the following way (see Fig. 1): Let Q be sufficiently near to P. Then choose a point $P_1 (c = c_1)$ so that Q has the coordinates $(0, y_1, z_1)$ in the tangent-normal system to P_1. Let P_1 lie in a τ_1-neighborhood of $P_0 (\tau_1 < \tau)$. Then we can write W_1 in the form

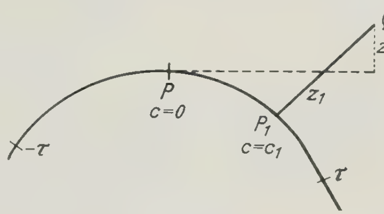

Fig. 1

(4.5) $$W_1 = W_1^{\tau_1} + W_1^* \quad \text{with} \quad W_1^{\tau_1} = \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \varrho \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \, dc.$$

The function W_1^* is bounded; for $W_1^{\tau_1}$ we get

(4.6) $$\begin{aligned} |W_1^{\tau_1}| \leqq A \left| \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}}{r^3} \, dx \right| &= O\left(\int_{-\tau_1 - c_1}^{\tau_1 - c_1} \frac{x^2 + x(y - y_1) + (z - z_1)}{\sqrt{x^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}^{\,3}} \, dx \right) \\ &= O\left(\int_{-\tau_1 - c_1}^{\tau_1 - c_1} \frac{dx}{r^2} \right). \end{aligned}$$

With

(4.7) $$r = \sqrt{x^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}, \qquad \varrho = \sqrt{y_1^2 + z_1^2}, \qquad R = \sqrt{x^2 + \varrho^2}$$

we get

(4.8) $$\begin{aligned} \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right| = \frac{|R^2 - r^2|}{r R (r + R)} \quad & \frac{|y| (|y - y_1| + |y_1|) + |z| (|z - z_1| + |z_1|)}{r R (r + R)} \\ = O(1) \quad & \text{for} \quad \varrho \to 0, \end{aligned}$$

and, by induction, it follows that

(4.9) $$\left| \frac{1}{r^N} - \frac{1}{R^N} \right| = O\left(\frac{1}{R^{N-1}} \right).$$

Thus we get

(4.10) $$|W_1^{\tau_1}| = O\left(\int \frac{dx}{R^2} \right) = O\left(\frac{1}{\varrho} \right),$$

ϱ being the distance of Q from the curve C (in the normal plane). The example of the straight line shows that in general the estimate in (4.10) cannot be improved.

In a similar way, in the general case ($N \geqq 1$) we get the result

$$|W_N^{\tau_1}| = O\left(\int \frac{dx}{R^{N+1}}\right) = O\left(\frac{1}{\varrho^N}\right). \tag{4.11}$$

Thus we have

Lemma 8. *The function $W_N(p)$ has a singularity like ϱ^{-N} as p approaches the curve C. ϱ is the distance from p to the curve C taken in the normal plane of the curve.*

We can now describe the singular behavior of the functions

$$U_N = \int\limits_S \varrho \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N \frac{1}{r}\, dS. \tag{4.12}$$

Since the line integrals in (3.10) contain derivatives of $1/r$ of maximum order $N-1$, we get

Theorem 3. *The potential functions*

$$U_N(p) = \int\limits_S \varrho \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N \frac{1}{r}\, dS \qquad N > 1$$

have a singularity like R_1^{1-N} as p approaches the curve C (R_1 being the distance from p to the curve C taken in the normal plane of the curve). Besides this, at the corners there are point singularities of order R_2^{1-N} (R_2 being the distance from p to the corner).

Similarly, from (3.11), we get

Theorem 4. *The potential functions*

$$\nabla U_N = \nabla \int\limits_S \varrho \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^N \frac{1}{r}\, dS \qquad N \geqq 1$$

have a singularity like R_1^{-N} as p approaches the curve C. At the corners there are point singularities of order R_2^{-N}.

5. The reduction of the differentiability assumptions

In order to simplify the presentation, so far we have assumed that the surface S, the boundary curve C and the layer function ϱ are analytic. However, analyticity was not used. Actually, it is sufficient to assume differentiability of finite order. In discussing the behavior of the functions U_N at interior points of S these assumptions are stated in [2]. Thus we need consider only boundary points. In discussing the functions U_N, only derivatives of order $N-1$ occurred. Thus we assume C, S and ϱ to be $(N-1)$-times differentiable. To be able to introduce the tangent-normal coordinate system, however, C has to be at least twice (or once Hölder-continuously) differentiable. The layer function ϱ has at least to be bounded. For the discussion of ∇U, the derivatives of order N should exist.

This research was supported by the U.S. Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command, under Contract No. AF 49 (638) 229.

References

[1] LICHTENSTEIN, L.: Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Enzk. d. Math. Wiss., Bd. II/3, 1, p. 197ff.
[2] MÜLLER, C.: Die Potentiale einfacher und mehrfacher Flächenbelegungen. Math. Ann. **123**, 235ff. (1951).
[3] MÜLLER, C., & R. LEIS: Über Potentialfunktionen von Kurvenbelegungen. Arch. Rational Mech. Anal. **2**, 87ff. (1958).

Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Rhein.-Westf. Technische Hochschule
Aachen

(Received December 1, 1960)

Singular Perturbations of Eigenvalue Problems

W. A. HARRIS, JR.

Communicated by A. ERDÉLYI

1. Introduction

This paper deals with the eigenvalue problem,

$$L[y, \alpha] = \frac{d}{dt} y - \{\alpha A(t) + B(t, \alpha)\} y = \lambda R(t) y, \tag{1.1}$$

$$s[y, \alpha] = M(\alpha) y(a, \alpha) + N(\alpha) y(b, \alpha) = 0, \tag{1.2}$$

where A, B, R, M, and N are square matrices of order $n+m$, y is a vector of order $n+m$, α is a large parameter, and $-\infty < a \leqq t \leqq b < +\infty$. The matrices $B(t, \alpha)$, $M(\alpha)$, and $N(\alpha)$ have convergent representations of the form

$$\begin{aligned} B(t, \alpha) &= \sum_{j=0}^{\infty} B_j(t)\, \alpha^{-j} \\ M(\alpha) &= \sum_{j=0}^{\infty} M_j\, \alpha^{-j} \\ N(\alpha) &= \sum_{j=0}^{\infty} N_j\, \alpha^{-j}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

for sufficiently large α, and all functions are infinitely differentiable with respect to t, $a \leqq t \leqq b$.

The character of this problem as $\alpha \to \infty$ depends on the matrix A, and we shall assume that A has the partitioning

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

where A_{22} is a square matrix of order m which is nonsingular for $a \leqq t \leqq b$. The problem is to investigate the spectrum of $L[y, \alpha]$, $s[y, \alpha]$ in its dependence on the parameter α.

If we formally let $\alpha \to \infty$, that is, multiply (1.1) by $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} I_m \end{pmatrix}$ where I_n and I_m are identity matrices of order n and m respectively, and let $\alpha \to \infty$, we get the *degenerate* differential system which can be written, after suitable partitioning,

$$\frac{d y_1}{dt} - (B_{11}^0 y_1 + B_{12}^0 y_2) = \lambda (R_{11} y_1 + R_{12} y_2) - (A_{21} y_1 + A_{22} y_2) = 0. \tag{1.5}$$

If A_{22} is nonsingular, the last equation may be solved for y_2 in terms of y_1, and y_2 may be inserted in the first equation to obtain a differential system of lower order.

If the eigenvalues of (1.1), (1.2) have finite limits as $\alpha \to \infty$, one would expect that the limits are eigenvalues for the degenerate differential system (1.5) with appropriate boundary conditions related to $s[y, \infty]$. Since the degenerate differential system together with appropriate boundary conditions is essentially an eigenvalue problem of lower order, one speaks of *singular* perturbations.

These problems have a close connection with singular perturbations of boundary problems. There, the corresponding problem is the relationship of the solution of a boundary problem of the type

$$L[y, \alpha] = \frac{dy}{dt} - (\alpha A + B)\, y = 0,$$

$$s[y, \alpha] = M\, y(a, \alpha) + N\, y(b, \alpha) = c(\alpha)$$

as $\alpha \to \infty$ to the solutions of a related degenerate problem obtained by setting $\alpha = \infty$ formally, where as before A has the same structure. The boundary problem has been treated by many authors, especially W. WASOW [*13*], G. CHAPIN, Jr. [*2*], and the author [*4*]. The two problems have similar features, and the methods for the proofs are closely related.

A typical feature of both problems is that for $\alpha < \infty$ we have a differential system of order $n+m$ and a boundary form of rank $n+m$, but in the degenerate case the differential system is essentially of order m while the boundary form is of rank $n+m$. However, if the limit as $\alpha \to \infty$ of a solution of the boundary problem exists, it is in general a solution of the degenerate differential system and n appropriate degenerate boundary conditions. The determination of the appropriate boundary conditions is quite similar for both problems.

It will be shown under suitable restrictions that corresponding to each simple eigenvalue λ_0 of the degenerate (or unperturbed) eigenvalue problem there exists a uniquely determined eigenvalue of the complete eigenvalue problem, $\lambda(\alpha)$, which has an asymptotic expansion of the form

$$\lambda(\alpha) \simeq \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{\alpha} + \cdots.$$

Further, an eigenvector $y(t, \alpha)$ corresponding to $\lambda(\alpha)$ may be determined so that

$$y(t, \alpha) \simeq y_0(t) + \frac{1}{\alpha}\, y_1(t) + \cdots,$$

on the open interval $a < t < b$ and uniformly on any closed sub-interval, where $y_0(t)$ is an eigenvector corresponding to λ_0 for the degenerate problem.

It is not apparent that this method will yield all the eigenvalues of the complete problem. However, it will be shown that for a class of *self-adjoint* problems this procedure characterizes the asymptotic behavior of *all* the eigenvalues of the complete problem.

Similar perturbation problems in which the eigenvalues can be obtained as asymptotic series have been treated by T. KATO [*5*], J. MOSER [*7*], and V. KRAMER [*6*].

2. Preliminary Transformations

We shall use the symbol 0 indiscriminately for the zero matrix of any dimension, I for an identity matrix of any order, and I_k for an identity matrix of order k when we wish to emphasize the order. We shall use the symbol diag $(A:B)$ to represent the matrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. All partitionings that occur are such that the diagonal blocks are square. The norm of a matrix A is denoted by $\|A\|$ and is the maximum of the magnitudes of the elements of A.

Hypothesis 1.

(i) *The matrices $M(\alpha)$ and $N(\alpha)$ have convergent representations of the form* (1.3) *when α is sufficiently large.*

(ii) *The matrix $B(t, \alpha)$ has a uniformly convergent representation of the form* (1.3) *when α is sufficiently large, where the elements of $B_i(t)$ are infinitely differentiable on the finite closed interval $[a, b]$.*

(iii) *The elements of $A(t)$ and $R(t)$ are infinitely differentiable on $[a, b]$.*

(iv) *$A(t)$ has the partitioning* (1.4).

(v) *There exists a square matrix $T_{22}(t)$ of order m whose elements are infinitely differentiable on $[a, b]$ such that $T_{22}^{-1}(t)\, A_{22}(t)\, T_{22}(t) = (\delta_{ij}\, \beta_j(t))$,*

$$\beta_1(t) = \beta_2(t) = \cdots = \beta_{\tau_1}(t) \neq \beta_{\tau_1+1}(t) = \cdots = \beta_{\tau_2}(t) \neq \cdots \neq \beta_{\tau_{\gamma-1}-1}(t) = \cdots = \beta_{\tau_\gamma}(t),$$

$$\operatorname{Re}\{\beta_1\} \leqq \operatorname{Re}\{\beta_2\} \leqq \cdots \leqq \operatorname{Re}\{\beta_k\} < 0 < \operatorname{Re}\{\beta_{k+1}\} \leqq \cdots \leqq \operatorname{Re}\{\beta_m\}, \quad a \leqq t \leqq b.$$

Since $\operatorname{Re}\{\beta_j\} \neq 0$, A_{22} is nonsingular, and the following transformation may be made:

$$y(t, \alpha) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} z(t, \alpha) = T(t)\, z(t, \alpha), \tag{2.1}$$

where T_{22} is the matrix given in H 1—(v) and $T_{21} = -A_{22}^{-1} A_{21}$. Under this transformation (1.1) becomes

$$\begin{gathered} \frac{dz}{dt} = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\delta_{ij}\beta_j) \end{pmatrix} + \hat{B}(t, \alpha) + \lambda\, \hat{R}(t)\right\} z, \\ \hat{B}(t, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{B}_j(t)\, \alpha^{-j}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

The degenerate differential system corresponding to (2.2) may be written (after suitable partitioning)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z_1 &= \{\hat{B}_{0,11}(t) + \lambda\, \hat{R}_{11}(t)\}\, z_1 + \{\hat{B}_{0,12}(t) + \lambda\, \hat{R}_{12}(t)\}\, z_2 \\ 0 &= \{(\delta_{ij}\, \beta_j(t))\}\, z_2, \end{aligned}$$

or equivalently

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \{\hat{B}_{0,11}(t) + \lambda\, \hat{R}_{11}(t)\}\, z_1 \\ 0 &= z_2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

where

$$\hat{B}_0(t) = \begin{pmatrix} \hat{B}_{0,11} & \hat{B}_{0,12} \\ \hat{B}_{0,21} & \hat{B}_{0,22} \end{pmatrix}, \qquad \hat{R}(t) = \begin{pmatrix} \hat{R}_{11} & \hat{R}_{12} \\ \hat{R}_{21} & \hat{R}_{22} \end{pmatrix},$$

$\hat{B}_{0,11}$, $\hat{R}_{11}$ are of order n, and $\hat{B}_{0,22}$, $\hat{R}_{22}$ are of order m.

Lemma 1. *Let Hypothesis 1 hold. To every positive integer σ and $\Lambda>0$, for sufficiently large α, $\alpha>\alpha_0$, there exists a fundamental matrix of the differential system* (2.2) *of the form*

$$Z(t,\alpha,\lambda)=\left(\sum_{i=0}^{\sigma} Z_i(t,\lambda)\,\alpha^{-i}+\frac{1}{\alpha^{\sigma+1}} Z_{\sigma+1}(t,\lambda,\alpha)\right)E(t,\alpha), \tag{2.4}$$

where

$$E(t,\alpha)=\left(\delta_{ij}\exp\left\{\alpha\int_a^t \varrho_j(\xi)\,d\xi\right\}\right),\qquad \varrho_j(\xi)=\left\{\begin{matrix}0, & j=1,\dots,n\\ \beta_{j-n}(\xi), & j=n+1,\dots,n+m\end{matrix}\right\},$$

$$\|Z_{\sigma+1}(t,\lambda,\alpha)\|<c_\sigma,$$

c_σ *independent of t,α,λ in $a\leqq t\leqq b$, $\alpha>\alpha_0$, $|\lambda|<\Lambda$. Further $Z_0(t,\lambda)=\operatorname{diag}(Z_{11}^0\colon Z_{22}^0\colon\dots\colon Z_{\gamma+1,\gamma+1}^0)$, Z_{jj}^0 is of order $\tau_{j-1}-\tau_{j-2}(\tau_0=0)$, $j\geqq 2$, $\det Z_{jj}^0\neq 0$, $j\geqq 1$, $a\leqq t\leqq b$, $|\lambda|<\Lambda$, and in particular Z_{11}^0 is of order n and a fundamental matrix for the degenerate differential system,*

$$\frac{d}{dt}z_1=\{\widehat{B}_{11}^0(t)+\lambda\widehat{R}_{11}(t)\}\,z_1.$$

Note. This method of describing the asymptotic behavior of solutions of differential systems by divergent power series is now standard. The investigations of TURRITTIN [*12*] are especially appropriate, but since we have an additional parameter λ, and since we need the dependence on λ of the constructed solutions, we give the following proof of this lemma.

Proof of Lemma 1. We first construct a formal fundamental matrix and then prove that this formal matrix is asymptotic to a *true* fundamental matrix.

The equation under consideration is of the form $\frac{dz}{dt}=\alpha C z$, $C=\sum_{j=0}^{\infty} C_j\alpha^{-j}$, where $C_0=\operatorname{diag}(0\colon(\delta_{ij}\beta_j))$, $C_1(t,\lambda)=\widehat{B}_0(t)+\lambda\widehat{R}(t)$, $C_j(t)=\widehat{B}_j(t)$, $j>1$. Substitute a formal series $Z(t,\alpha,\lambda)=\left\{Z_0(t,\lambda)+\frac{1}{\alpha}Z_1(t,\lambda)+\cdots\right\}E(t,\alpha)$, where $E(t,\alpha)=\exp\left\{\alpha\int_a^t C_0(\eta)\,d\eta\right\}$. (Since $C_0(t)$ is a diagonal matrix, we have $\frac{d}{dt}E(t,\alpha)=\alpha C_0(t)\,E(t,\alpha)$.) We obtain

$$\left(Z_0+\frac{1}{\alpha}Z_1+\cdots\right)\alpha C_0 E+\left(Z_0'+\frac{1}{\alpha}Z_1'+\cdots\right)E=\left(\alpha C_0+C_1+\frac{1}{\alpha}C_2+\cdots\right)(Z_0+\cdots)\,E,$$

or

$$\begin{aligned}&Z_0C_0=C_0Z_0,\\ &Z_1C_0+Z_0'=C_0Z_1+C_1Z_0,\\ &Z_2C_0+Z_1'=C_0Z_2+C_1Z_1+C_2Z_0,\quad\text{etc.}\end{aligned}\tag{2.5}$$

C_0 has the form $\operatorname{diag}(\beta_{\tau_0}I_n\colon\beta_{\tau_1}I_{\tau_1}\colon\beta_{\tau_2}I_{\tau_2-\tau_1}\colon\dots\colon\beta_{\tau_\gamma}I_{\tau_\gamma-\tau_{\gamma-1}})$, $\beta_{\tau_0}=0$. Hence, partitioning all matrices in (2.5) in this manner, we see that the off-diagonal blocks of Z_0 must be identically zero. Now consider the diagonal blocks in the second equation. The contribution from Z_1C_0 will cancel the contribution from C_0Z_1, and hence we have in this partitioning, if $(Z)_{jj}$ represents the j^{th} diagonal block, $(Z_0')_{jj}=(\widehat{B}_0+\lambda\widehat{R})_{jj}(Z_0)_{jj}$. We can choose the initial conditions to be

independent of λ and determine $(Z_0)_{jj}$ as a fundamental matrix whose elements are entire functions of λ. Thus Z_0 is completely determined, $\det Z_0 \neq 0$, $a \leqq t \leqq b$. Consider now the off-diagonal blocks of the second equation. $(Z_1)_{ij}\beta_{\tau_j} = \beta_{\tau_i}(Z_1)_{ij} + (C_1)_{ij}(Z_0)_{jj}$. Since $\beta_{\tau_i} \neq \beta_{\tau_j}$, this determines $(Z_1)_{ij}$ as an entire function of λ. The diagonal blocks of the third equation give $(Z_1')_{jj} = (C_1)_{jj}(Z_1)_{jj} + (C_2)_{jj}(Z_0)_{jj}$, and hence $(Z_1)_{jj}$ may be determined by solving non-homogeneous differential systems, and if the initial conditions are independent of λ, the elements of $(Z_1)_{jj}$ will be entire functions of λ.

This process may be continued to obtain a formal fundamental matrix with the desired properties and of the form $Z = UE$.

Since U is a formal power series with nonsingular leading term, Z_0, U^{-1} is a formal power series with nonsingular leading term, Z_0^{-1}. As $Z' = \alpha C Z$ formally, $\frac{1}{\alpha} Z' Z^{-1} = C$ formally, and $\frac{1}{\alpha} U' U^{-1} + U C_0 U^{-1} = C$ formally. Hence, if we replace U by a finite number of terms

$$\bar{U} = Z_0 + \frac{1}{\alpha} Z_1 + \cdots + \frac{1}{\alpha^p} Z_p,$$

and define $\bar{C}$ by

$$\bar{C} = \frac{1}{\alpha} \bar{U}' \bar{U}^{-1} + \bar{U} C_0 \bar{U}^{-1},$$

then $\bar{C}$ is a convergent power series in $\frac{1}{\alpha}$ for α sufficiently large and the coefficients of $1, \ldots, \alpha^p$ in C and $\bar{C}$ are the same, and $\|C - \bar{C}\| < \frac{c_1}{\alpha^{p+1}}$ for an appropriate constant c_1.

$\bar{Z} = \bar{U} E$ solves the differential equation $\bar{Z}' = \alpha \bar{C} \bar{Z}$ by construction. Writing the original differential equation in the form $Z' - \alpha \bar{C} Z = \alpha (C - \bar{C}) Z$, we obtain the integral equation $Z = \bar{Z} + \alpha \int^t \bar{Z}(t) \bar{Z}^{-1}(\xi)(C - \bar{C}) Z(\xi)\, d\xi$, or $U = \bar{U} + J(U)$, where

$$J(U) = \alpha \int^t \bar{U}(t) \left(\delta_{ij} \exp\left\{\alpha \int_\xi^t \varrho_j(\tau)\, d\tau\right\}\right) \bar{U}^{-1}(\xi)(C - \bar{C})\, U(\xi) \left(\delta_{ij} \exp\left\{-\alpha \int_\xi^t \varrho_j(\tau)\, d\tau\right\}\right) d\xi.$$

$J(U)$ is a matrix which is linear in the elements of $U = (U_{kl})$, and the coefficient of U_{kl} in $J(U)$ has the form

$$\sum_{r,s} \int^t a_{rs}^{(kl)}(t, \xi, \alpha) \exp\left\{\alpha \int_\xi^t \varrho_r(\tau) - \varrho_s(\tau)\, d\tau\right\} d\xi,$$

where $a_{rs}^{(kl)}$ are convergent power series in $\frac{1}{\alpha}$. We choose a as the lower limit of integration if $\mathrm{Re}\{\varrho_r(\tau) - \varrho_s(\tau)\} \leqq 0$ and b as the lower limit of integration if $\mathrm{Re}\{\varrho_r(\tau) - \varrho_s(\tau)\} \geqq 0$. Then, since $\|C - \bar{C}\| < c_1/\alpha^{p+1}$, $\|J(U)\| < c_2 \|U\|/\alpha^p$ with an appropriate constant c_2, and if α is large enough, $\|J(U)\| < \frac{1}{2}\|U\|$.

We can solve $U = \bar{U} + J(U)$ by iteration, $U_0 = 0$, $U_{k+1} = \bar{U} + J(U_k)$. This sequence converges uniformly for $|\lambda| < \Lambda$ because

$$\|U_{k+1} - U_k\| \leqq \tfrac{1}{2}\|U_k - U_{k-1}\| \leqq 2^{-k}.$$

Further, since

$$U = \lim_{k\to\infty} U_k, \qquad U = \bar{U} + (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + \cdots,$$

and

$$\|U\| \leqq \|\bar{U}\| + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots = \|\bar{U}\| + 1,$$

hence

$$\|J(U)\| < c_2\left(\|\bar{U}\| + 1\right)/\alpha^p < c_3/\alpha^p.$$

This inequality implies that the coefficients of $1, \ldots, \alpha^{-p+1}$ are the same in U and $\bar{U}$.

The iteration shows that the elements of $U_0, U_1, \ldots$ are entire functions of λ, and the uniform convergence, $U_k \to U$ in $|\lambda| < \Lambda$, shows that U is analytic in $|\lambda| < \Lambda$. Hence we obtain a solution $Z(t, \alpha, \lambda) = U(t, \alpha, \lambda)\, E(t, \alpha)$ with the desired properties. This completes the proof of Lemma 1.

The solution constructed in Lemma 1 depends on σ. One can construct solutions which are independent of σ, but we shall not need this result.

3. Permissible Boundary Forms

The boundary form $s[y, \alpha]$ is rather arbitrary since multiplication on the left by a nonsingular matrix gives rise to an equivalent boundary form which gives the same solution to the eigenvalue problem.

We have made a transformation, $y = Tz$, of the differential system. This transformation will also affect the boundary form $s[y, \alpha]$. In particular, the boundary form for z will be

$$t[z, \alpha] = s[Tz, \alpha] = P(\alpha)\, z(a, \alpha) + Q(\alpha)\, z(b, \alpha), \tag{3.1}$$

where

$$P(\alpha) = M(\alpha)\, T(a) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \alpha^{-j}, \qquad Q(\alpha) = N(\alpha)\, T(b) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j \alpha^{-j}.$$

Let P_0 and Q_0 have the partitioning

$$P_0 = \begin{pmatrix} P_{11}^0 & P_{12}^0 & P_{13}^0 \\ P_{21}^0 & P_{22}^0 & P_{23}^0 \\ P_{31}^0 & P_{32}^0 & P_{33}^0 \end{pmatrix}, \qquad Q_0 = \begin{pmatrix} Q_{11}^0 & Q_{12}^0 & Q_{13}^0 \\ Q_{21}^0 & Q_{22}^0 & Q_{23}^0 \\ Q_{31}^0 & Q_{32}^0 & Q_{33}^0 \end{pmatrix},$$

where the diagonal matrices P_{11}^0, P_{22}^0, P_{33}^0 have orders n, k, $m-k$ respectively, and similarly for Q_0.

One would expect that the degenerate boundary form would have associated matrices of order n whose rows would be linear combinations of the rows of

$$\begin{pmatrix} P_{11}^0 \\ P_{21}^0 \\ P_{31}^0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} Q_{11}^0 \\ Q_{21}^0 \\ Q_{31}^0 \end{pmatrix}$$

It turns out that the matrix Γ,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} P_{12}^0 & Q_{13}^0 \\ P_{22}^0 & Q_{23}^0 \\ P_{32}^0 & Q_{33}^0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

plays an important role in selecting the proper linear combinations of rows for the degenerate boundary form.

If Γ has maximum rank, m, then there exists a nonsingular constant matrix F of order $n+m$ such that

$$(3.3)\qquad \hat{\Gamma}=F\Gamma=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \hat{P}_{22}^0 & 0\\ 0 & \hat{Q}_{33}^0\end{pmatrix},\qquad \det\hat{P}_{22}^0\neq 0,\qquad \det\hat{Q}_{33}^0\neq 0.$$

The boundary form $\hat{t}[z,\alpha]=F t[z,\alpha]$ is an equivalent boundary form for which

$$(3.4)\qquad \hat{P}_0=\begin{pmatrix}\hat{P}_{11}^0 & 0 & \hat{P}_{13}^0\\ \hat{P}_{21}^0 & \hat{P}_{22}^0 & \hat{P}_{23}^0\\ \hat{P}_{31}^0 & 0 & \hat{P}_{33}^0\end{pmatrix},\qquad \hat{Q}_0=\begin{pmatrix}\hat{Q}_{11}^0 & \hat{Q}_{12}^0 & 0\\ \hat{Q}_{21}^0 & \hat{Q}_{22}^0 & 0\\ \hat{Q}_{31}^0 & \hat{Q}_{32}^0 & \hat{Q}_{33}^0\end{pmatrix}.$$

With this adjustment, the degenerate boundary form will have $\hat{P}_{11}^0$ and $\hat{Q}_{11}^0$ as associated matrices, and the degenerate eigenvalue problem is defined by

$$(3.5)\qquad \begin{aligned}\frac{dz_1}{dt}&=\{\hat{B}_{0,11}(t)+\lambda\hat{R}_{11}(t)\}z_1\\ \hat{P}_{11}^0 z(a)&+\hat{Q}_{11}^0 z_1(b)=0.\end{aligned}$$

The eigenvalue problem (3.5) is reasonable only if the n by $2n$ matrix $(\hat{P}_{11}^0\ \hat{Q}_{11}^0)$ has rank n.

Definition. *The boundary form $\hat{s}[y,\alpha]$ of rank $n+m$ is said to be permissible if the boundary form $\hat{t}[z,\alpha]=\hat{s}[Tz,\alpha]$ is such that* (3.4) *holds and* $(\hat{P}_{11}^0\ \hat{Q}_{11}^0)$ *has rank n.*

4. Eigenvalues

$\lambda(\alpha)$ is an eigenvalue of the problem (1.1), (1.2) if there exists a non-identically vanishing vector $y(t,\alpha)$ which satisfies (1.1), (1.2). If $Y(t,\alpha,\lambda)$ is a fundamental matrix for the differential system (1.1), then any particular solution $y(t,\alpha)$ must be of the form $y(t,\alpha)=Y(t,\alpha,\lambda)\,l(\alpha)$. Thus, if $y(t,\alpha)$ is to satisfy the boundary condition, we must have

$$\{M(\alpha)\,Y(a,\alpha,\lambda)+N(\alpha)\,Y(b,\alpha,\lambda)\}\,l(\alpha)=0,\quad\text{and if}\quad l(\alpha)\not\equiv 0,$$

we must have

$$(4.1)\qquad \Delta(\alpha,\lambda)=\det\{M(\alpha)\,Y(a,\alpha,\lambda)+N(\alpha)\,Y(b,\alpha,\lambda)\}=0,$$

that is, $\lambda=\lambda(\alpha)$ is determined by (4.1).

Theorem 1. *Let Hypothesis 1 hold and let the boundary form* (1.2), $s[y,\alpha]$, *be equivalent to the boundary form $\hat{s}[y,\alpha]$ which is permissible. Let the degenerate eigenvalue problem be defined by* (1.5) *and the first n rows of the boundary form $\hat{s}[y,\infty]$.*

If λ_0 is a simple eigenvalue for the degenerate problem, then, for sufficiently large α, there exists in a neighborhood of λ_0 a uniquely determined simple eigenvalue $\lambda=\lambda(\alpha)$ belonging to the complete eigenvalue problem (1.1), (1.2), *and $\lambda(\alpha)$ can be written in the form*

$$\lambda(\alpha)=\lambda_0+\frac{1}{\alpha}\lambda_1+\cdots+\frac{\lambda_\sigma}{\alpha^\sigma}+\frac{\Lambda(\alpha)}{\alpha^{\sigma+1}},\qquad |\Lambda(\alpha)|<c_\sigma.$$

An eigenvector $y(t, \alpha)$ corresponding to $\lambda(\alpha)$ is determined uniquely up to a factor depending on α with a suitable choice of this factor $y(t, \alpha)$ can be written in the form

$$y(t, \alpha) = y_0(t) + \frac{1}{\alpha} y_1(t) + \cdots + \frac{1}{\alpha^\sigma} y_\sigma(t) + \frac{1}{\alpha^{\sigma+1}} y_{\sigma+1}(t, \alpha),$$

$a < \delta_1 \leq t \leqq \delta_2 < b$, $\|y_{\sigma+1}(t, \alpha)\| < c_\sigma(\delta_1, \delta_2)$, *for every positive integer* σ, *where* $y_0(t)$ *is an eigenvector for the degenerate problem corresponding to* λ_0.

Proof of Theorem 1. Under Hypothesis 1 there exists a transformation $T(t)$ which changes the differential system (1.1) into the canonical form (2.2) and the boundary form $\hat{s}[y, \alpha]$ into $\hat{t}[z, \alpha]$ for which (3.4) holds. Under this transformation the degenerate differential system (1.5) becomes (2.3), and the first n rows of $\hat{t}[z, \alpha]$ become $\hat{P}_{11}(\alpha)\, z_1(a, \alpha) + \hat{Q}_{11}(\alpha)\, z_1(b, \alpha)$.

We wish to determine the asymptotic expansion of

$$\Delta(\alpha, \lambda) = \det\{M(\alpha)\, Y(a, \alpha, \lambda) + N(\alpha)\, Y(b, \alpha, \lambda)\}.$$

If $Z(t, \alpha, \lambda)$ is a fundamental matrix for the differential system (2.2), $Y(t, \alpha, \lambda) = T(t) Z(t, \alpha, \lambda)$ is a fundamental matrix for (1.1). Hence $\Delta(\alpha, \lambda)$ can also be written

$$\Delta(\alpha, \lambda) = \det\{\hat{P}(\alpha)\, Z(a, \alpha, \lambda) + \hat{Q}(\alpha)\, Z(b, \alpha, \lambda)\}. \tag{4.2}$$

Choose for $Z(t, \alpha, \lambda)$ the fundamental matrix indicated in (2.4) and let Ω be the matrix

$$\Omega(\alpha, \lambda) = \hat{P}(\alpha)\, Z(a, \alpha, \lambda) + \hat{Q}(\alpha)\, Z(b, \alpha, \lambda). \tag{4.3}$$

Let the matrix Ω have the partitioning (Ω_{ij}), $i, j = 1, 2, 3$, so that Ω_{jj} has order $n, k, m-k$ for $j = 1, 2, 3$ respectively, and let the other matrices have similar partitioning.

Since $E(a, \alpha) = I$, we may write, with this choice of fundamental matrix,

$$\Omega = \left\{ \hat{P}(\alpha) \begin{pmatrix} Z_{11}(a) & Z_{12}(a) & Z_{13}(a)\, E_3^{-1}(b, \alpha) \\ Z_{21}(a) & Z_{22}(a) & Z_{23}(a)\, E_3^{-1}(b, \alpha) \\ Z_{31}(a) & Z_{32}(a) & Z_{33}(a)\, E_3^{-1}(b, \alpha) \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \hat{Q}(\alpha) \begin{pmatrix} Z_{11}(b) & Z_{12}(b)\, E_2(b, \alpha) & Z_{13}(b) \\ Z_{21}(b) & Z_{22}(b)\, E_2(b, \alpha) & Z_{23}(b) \\ Z_{31}(b) & Z_{32}(b)\, E_2(b, \alpha) & Z_{33}(b) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & E_3(b, \alpha) \end{pmatrix}.$$

From the nature of the elements in $E_2(b, \alpha)$ and $E_3(b, \alpha)$ we infer that

$$\|Z_{i3}(a, \alpha)\, E_3^{-1}(b, \alpha)\| \to 0,$$
$$\|Z_{i2}(b, \alpha)\, E_2(b, \alpha)\| \to 0$$

exponentially fast as $\alpha \to \infty$. Hence the asymptotic expansion of these matrices will be zero, and the asymptotic expansion of $\Delta(\alpha, \lambda) = \det \Omega(\alpha, \lambda)$ will be the

same as that of

$$\tilde{\Delta}(\alpha,\lambda) = \det\left\{\hat{P}(\alpha)\begin{pmatrix} Z_{11}(a) & Z_{12}(a) & 0 \\ Z_{21}(a) & Z_{22}(a) & 0 \\ Z_{31}(a) & Z_{32}(a) & 0 \end{pmatrix} + \hat{Q}(\alpha)\begin{pmatrix} Z_{11}(b) & 0 & Z_{13}(b) \\ Z_{12}(b) & 0 & Z_{23}(b) \\ Z_{13}(b) & 0 & Z_{33}(b) \end{pmatrix}\right\} \det E_3(b,\alpha).$$

If we let $\tilde{\Delta} = \tilde{D} \det E_3(b,\alpha)$, $\tilde{D}$ will have an asymptotic expansion

$$\tilde{D}(\lambda,\alpha) = D_0(\lambda) + \frac{1}{\alpha} D_1(\lambda) + \cdots,$$

where

$$D_0(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \hat{P}^0_{11} Z^0_{11}(a) + \hat{Q}^0_{11} Z^0_{11}(b) & 0 & 0 \\ \hat{P}^0_{21} Z^0_{11}(a) + \hat{Q}^0_{21} Z^0_{11}(b) & \hat{P}^0_{22} Z^0_{22}(a) & 0 \\ \hat{P}^0_{31} Z^0_{11}(a) + \hat{Q}^0_{31} Z^0_{11}(b) & 0 & \hat{Q}^0_{33} Z^0_{33}(b) \end{pmatrix}.$$

Since the boundary form is permissible, the determinants of $\hat{P}^0_{22}$ and $\hat{Q}^0_{33}$ are not zero, and since Z^0_{22} and Z^0_{33} are fundamental matrices for linear differential systems, $Z^0_{22}(a)$ and $Z^0_{33}(b)$ have a non-zero determinant. Thus, $D_0(\lambda) - C_1 F_0(\lambda)$, and $\Delta(\alpha,\lambda)$ can be written

$$\Delta(\alpha,\lambda) = C_1 F(\lambda,\alpha) \det E_3(b,\alpha), \tag{4.4}$$

where

$$F(\lambda,\alpha) = F_0(\lambda) + \frac{1}{\alpha} F_1(\lambda) + \cdots + \frac{1}{\alpha^\sigma} F_\sigma(\lambda) + \frac{1}{\alpha^{\sigma+1}} \varphi_\sigma(\lambda,\alpha), \tag{4.5}$$

$F_0(\lambda) = \det\{\hat{P}^0_{11} Z^0_{11}(a) + \hat{Q}^0_{11} Z^0_{11}(b)\}$, $\|\varphi_\sigma\| < c_1$, c_1 independent of λ and α, $\alpha > \alpha_0$, $|\lambda| < \Lambda$. Further, $F(\lambda,\alpha)$, $F_0(\lambda), \ldots, \varphi_\sigma(\lambda,\alpha)$ are analytic in λ, $|\lambda| < \Lambda$.

We note that the zeroes of $F_0(\lambda)$ are the eigenvalues of the degenerate eigenvalue problem, and the zeroes of $F(\lambda,\alpha)$ are the eigenvalues of the complete problem. If λ_0 is a simple eigenvalue for the degenerate problem, then $F_0(\lambda_0) = 0$, $\frac{\partial F_0}{\partial \lambda}(\lambda_0) \neq 0$, and one can show (*e.g.* by iteration) that for sufficiently large α the equation $F(\lambda,\alpha) = 0$ possesses a uniquely determined solution $\lambda(\alpha)$ which satisfies $\lambda(\infty) = \lambda_0$ and can be written in the form

$$\lambda(\alpha) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{\alpha} + \cdots + \frac{\lambda_\sigma}{\alpha^\sigma} + \frac{\Lambda_\sigma(\alpha)}{\alpha^{\sigma+1}}, \quad |\Lambda_\sigma| < c_2,$$

c_2 independent of α, $\alpha > \alpha_0$.

An eigenvector $y(t,\alpha)$ corresponding to the eigenvalue $\lambda(\alpha)$ is $y(t,\alpha) = T(t)\, Z\big(t,\alpha,\lambda(\alpha)\big)\, l(\alpha)$, where $l(\alpha)$ is a solution of the matrix equation

$$\Omega\big(\alpha,\lambda(\alpha)\big)\, l(\alpha) = 0. \tag{4.6}$$

We know that $\Delta\big(\alpha,\lambda(\alpha)\big) - \det \Omega\big(\alpha,\lambda(\alpha)\big) = 0$, hence one solution is given by the cofactors of the elements of any row for which all the cofactors do not vanish. The asymptotic expansion of the cofactors of any element in the first n rows and columns of Ω will have for leading term the corresponding cofactor of the same element in $\big(\hat{P}^0_{11} Z^0_{11}(a) + \hat{Q}^0_{11} Z^0_{11}(b)\big)$ multiplied by $\det\big(\hat{P}^0_{22} Z^0_{22}(a)\big)$, $\det\big(\hat{Q}^0_{33} Z^0_{33}(b)\big)$ and $\det E_3(b,\alpha)$. All such cofactors could not vanish, for this would imply that $\frac{\partial F_0}{\partial \lambda}(\lambda_0) - 0$, which contradicts the assumption that λ_0 is a simple eigenvalue.

A calculation similar to that used in evaluating $\Delta(\alpha, \lambda)$ will show that, after division by the factor $\det E_3(b, \alpha)$, $l(\alpha)$ may be written in the form

$$l(\alpha) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & E_3^{-1}(b,\alpha) \end{pmatrix} \left\{ l_0 + \frac{1}{\alpha} l_1 + \cdots \right\}, \tag{4.7}$$

where $l_0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ l_2^0 \\ l_3^0 \end{pmatrix}$, $Z_{11}^0(t, \alpha, \lambda(\alpha))\, l_1^0$ is an eigenvector for the degenerate eigenvalue problem (3.5). Thus $y(t, \alpha) = T(t)\, Z(t, \alpha, \lambda(\alpha))\, l(\alpha) = T(t) \left\{ Z_0 + \frac{1}{\alpha} Z_1 + \cdots \right\}$

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & E_2(t,\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & E_3(t,\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & E_3^{-1}(b,\alpha) \end{pmatrix} \left\{ l_0 + \frac{1}{\alpha} l_1 + \cdots \right\}.$$

Since $\|E_2(t, \alpha)\| \to 0$, $a < t \leqq b$, $\|E_3(t, \alpha)\, E_3(b, \alpha)^{-1}\| \to 0$, $a \leqq t < b$, exponentially fast as $\alpha \to \infty$, for $a < t < b$ and uniformly in any closed subinterval $a < \delta_1 \leqq t \leqq \delta_2 < b$, $y(t, \alpha) = T(t) \left\{ z_0(t) + \frac{1}{\alpha} z_1(t) + \cdots \right\}$, where

$$z_0(t) = \begin{pmatrix} Z_{11}^0(t, \alpha, \lambda(\alpha))\, l_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hence

$$y(t, \alpha) = y_0(t) + \frac{1}{\alpha} y_1(t) + \cdots + \frac{1}{\alpha^{\sigma+1}} y_{\sigma+1}(t, \alpha), \qquad a < \delta_1 \leqq t \leqq \delta_2 < b,$$
$$\|y_{\sigma+1}(t, \alpha)\| < c_2(\delta_1, \delta_2),$$

and $y_0(t)$ is an eigenvector for the degenerate problem. This completes the proof of Theorem 1.

Corollary. *If we assume in addition to the hypothesis of Theorem 1 that the elements of $A(t)$, $B(t, \alpha)$, $R(t)$, M, and N are real and that $Y(t, \alpha, \lambda)$ can be chosen so that $\overline{Y}(t, \alpha, \lambda) = Y(t, \alpha, \bar{\lambda})\, C$, where C is a constant matrix with determinant 1, then if λ_0 is real, $\lambda(\alpha)$ is real and $y(t, \alpha)$ can be chosen real.*

Proof of Corollary. Clearly by construction $Y(t, \alpha, \bar{\lambda})$ is a fundamental matrix for system (1.1) with λ replaced by $\bar{\lambda}$. Also $Y(t, \alpha, \lambda)$ satisfies (1.1), and, taking complex conjugates of both sides, we see that $\overline{Y}(t, \alpha, \lambda)$ is also a fundamental matrix for (1.1) with λ replaced by $\bar{\lambda}$. Hence

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}(\alpha, \lambda) &= \det\{M(\alpha)\, \overline{Y}(a, \alpha, \lambda) + N(\alpha)\, \overline{Y}(b, \alpha, \lambda)\} \\ &= \det\{M(\alpha)\, Y(a, \alpha, \bar{\lambda}) + N(\alpha)\, Y(b, \alpha, \bar{\lambda})\} \cdot \det C \\ &= \Delta(\alpha, \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

Thus, if λ_0 is real, $\lambda(\alpha)$ is determined uniquely by $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$ and $\Delta(\alpha, \lambda) = 0$. Further, an examination of the way in which $y(t, \alpha)$ was constructed shows that $y(t, \alpha)$ may be chosen real. This completes the proof of the corollary.

5. Self-adjoint Problems

For a two-point boundary problem of the form

$$y' = A(t)\, y + \lambda B(t)\, y,$$
$$M\, y(a) + N\, y(b) = 0$$

G. A. BLISS [1] introduced the concept of self-adjointness under a nonsingular transformation $z = T(t)\, y$ and considered in detail a special class termed *definitely* self-adjoint. This concept was modified and extended by W. T. REID [9—11].

Consider the differential operator L,

$$L[y, \varepsilon] = A_1(t, \varepsilon)\, y' + A_0(t, \varepsilon)\, y, \tag{5.1}$$

where the elements of $A_1(t, \varepsilon)$, $A_0(t, \varepsilon)$ are infinitely differentiable with respect to t, $a \leq t \leq b$, and analytic with respect to ε, $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0$. Corresponding to this operator is the classical Lagrange adjoint differential operator L^*,

$$L^*[z, \varepsilon] = (-A_1^*(t, \varepsilon)\, z)' + A_0^*(t, \varepsilon)\, z, \tag{5.2}$$

where A^* represents the conjugate transpose of A. Hence, corresponding to the boundary problem

$$L[y, \varepsilon] = \lambda B(t)\, y, \qquad s[y] = M\, y(a, \varepsilon) + N\, y(b, \varepsilon) = 0 \tag{5.3}$$

is the adjoint boundary problem

$$L^*[z, \varepsilon] = \lambda B^*(t)\, z, \qquad t[z] = M^* z(a, \varepsilon) + N^* z(b, \varepsilon) = 0. \tag{5.4}$$

Following the terminology of REID [11], the boundary problem (5.3) is said to be *symmetrizable under a transformation*

$$z(t, \varepsilon) = T(t, \varepsilon)\, y(t, \varepsilon) \tag{5.5}$$

if: (i) $T(t, \varepsilon)$ is infinitely differentiable with respect to t, $a \leq t \leq b$, analytic with respect to ε, $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0$, and nonsingular, $a \leq t \leq b$, $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$;

(ii) for arbitrary values of λ and ε, $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$, a vector y satisfies the differential system or boundary condition of (5.3) if and only if the corresponding vector z of (5.5) satisfies respectively the differential system or boundary condition of (5.4), in which case we say that (5.3) and (5.4) are equivalent;

(iii) the associated matrix $S(t, \varepsilon) = T^*(t, \varepsilon)\, B(t)$ is hermitian, $a \leq t \leq b$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

An important instance of symmetrizable problems is the case of problems that are *self-adjoint* in the classical Lagrange sense; that is,

$$L[y, \varepsilon] - \lambda B\, y \equiv L^*[y, \varepsilon] - \lambda B^* y,$$

while $s[y] = 0$ if and only if $t[y] = 0$. In terms of the coefficients, the conditions are $A_1 = -A_1^*$, $B = B^*$, $A_1' = A_0 - A_0^*$, $M^* A_1^{-1}(a, \varepsilon)\, M = N^* A_1^{-1}(b, \varepsilon)\, N$.

Reid [*11*] has shown that if (5.3) is equivalent to its adjoint under the transformation (5.5), then there exists a suitable transformation $T_1(t, \varepsilon)$ such that the boundary problem

$$(5.6) \qquad T_1^*(t, \varepsilon)\, L[y, \varepsilon] = \lambda T_1^* B y, \qquad s[y] = 0$$

is self-adjoint (in the classical sense). However, if the coefficient matrices A_0, A_1, B are real-valued and T is real-valued, T_1 may *not* always be chosen real-valued

Let

$$\langle y(t), z(t) \rangle = \int_a^b z^*(t)\, y(t)\, dt.$$

Definition. *Let $\mathscr{L}$ denote the linear space of vector-valued functions satisfying $s[y]=0$, $L[y, \varepsilon] = Bg$ for all $g(t, \varepsilon)$ infinitely differentiable with respect to t and analytic with respect to ε, $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$.*

For arbitrary real constants c_1, c_2 (or real-valued functions of the parameter ε) the formal operator

$$L[y, \varepsilon; c_1, c_2; T] = T^*(c_1 L[y, \varepsilon] + c_2 B y)$$

is hermitian on $\mathscr{L}$ in the sense that

$$(5.7) \qquad \langle L[y_1, \varepsilon; c_1, c_2; T], y_2 \rangle = \langle y_1, L[y_2, \varepsilon; c_1, c_2; T] \rangle,$$

y_1, y_2 members of $\mathscr{L}$. We note that if $T^* A_1$ is skew-hermitian, then (5.7) will also hold for y_1 and y_2 such that $s[y_1] = 0 = s[y_2]$. In either case, $\langle L[y, \varepsilon; c_1, c_2; T], y \rangle$ is real valued.

The problem (5.3) is called *definite* $[c_1, c_2; T]$ whenever (5.3) is symmetrizable under (5.5), and for this T and suitable constants c_1, c_2 the functional

$$(5.8) \qquad I[y, \varepsilon; c_1, c_2; T] = \langle L[y, \varepsilon; c_1, c_2; t], y \rangle$$

is positive for all y in $\mathscr{L}$ with $By \not\equiv 0$, $a \leqq t \leqq b$.

The problem (5.3) is called *normal* if there are no solutions of $L[y, \varepsilon] = 0$, $s[y] = 0$, $y \not\equiv 0$, such that $By \equiv 0$.

A problem that is normal and definite $[0, 1; T]$ may be treated by methods similar to those of Bliss [*1*]. A problem definite $[c_1, c_2; T]$ with $c_1 \neq 0$ is equivalent to a problem definite $[1, 0; T]$ through replacing λ by $\lambda - c_2/c_1$ in (5.3) and a problem which is normal and definite $[1, 0; T]$ may be handled by the method of Reid [*9*—*11*]. In all cases the eigenvalues are real.

It has been remarked by Reid that if the eigenvalues of (5.3) are bounded below then by replacing λ by $\lambda + \lambda_0$ such a problem can be reduced to one for which

$$(5.9) \qquad \begin{aligned} I[y; 1, 0; T] &= \langle T^* L[y, \varepsilon], y \rangle > 0, \\ I[y; 0, 1; T] &= \langle S y, y \rangle > 0 \end{aligned}$$

for y in $\mathscr{L}$, $By \not\equiv 0$, $S = T^* B$. Conversely, if we assume (5.9), then it can be proved that the eigenvalues are bounded below.

Consider a simple self-adjoint case, $T=I$,

$$\{A_1^0(t)\,y' + A_0^0(t)\,y\} + \varepsilon\{A_1^1(t)\,y' + A_0^1 y\} = \lambda\,B(t)\,y,$$

or

$$L[y,\varepsilon] = L_0[y] + \varepsilon\,L_1[y] = \lambda\,B\,y.$$

To insure semi-boundedness, we could ask that both L_0 and L_1 be semi-bounded, that is,

$$\langle L_0[y], y\rangle \geqq d_0\langle By, y\rangle, \quad \langle L_1[y], y\rangle \geqq d_1\langle By, y\rangle, \tag{5.10}$$

for y in $\mathscr{L}$, d_0, d_1 finite. However, if we set $\lambda=\hat{\lambda}+d_0+\varepsilon d_1$, $\hat{L}_0[y]+d_0By=L_0y$, and $\hat{L}_1[y]+d_1By=L_1[y]$, we get an equivalent problem $\hat{L}_0[y]+\varepsilon\hat{L}_1[y]=\hat{\lambda}By$ for which $\langle L_0[y], y\rangle\geqq 0$ and $\langle L_1[y], y\rangle\geqq 0$.

Similarly, if $L[y,\varepsilon]=\sum_{i=0}^{\infty} L_i[y]\,\varepsilon^i$, $\langle L_i[y], y\rangle\geqq d_i\langle By, y\rangle$, where $d(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty} d_i\,\varepsilon^i$ is convergent for $0\leqq\varepsilon\leqq\varepsilon_0$, then replacing λ by $\hat{\lambda}+d(\varepsilon)$, $L_i[y]$ by $\hat{L}_i[y]+d_iB\,y$, $L[y,\varepsilon]$ by $\hat{L}[y,\varepsilon]+d(\varepsilon)\,B\,y$, we get an equivalent problem $\hat{L}[y,\varepsilon]=\hat{\lambda}\,B\,y$ for which formally $\langle\hat{L}[y,\varepsilon], y\rangle\geqq 0$, y in $\mathscr{L}$. Further, if $\hat{L}^i$ is the operator $\frac{\partial^i}{\partial\varepsilon^i}\hat{L}$,

$$\hat{L}^i[y,\varepsilon] = \frac{\partial^i A_1}{\partial\varepsilon^i}\,y' + \frac{\partial^i A_0}{\partial\varepsilon^i}\,y = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-i+1)\,\hat{L}_n[y]\,\varepsilon^{n-i},$$

then formally $\langle\hat{L}^i[y,\varepsilon], y\rangle\geqq 0$, y in $\mathscr{L}$.

We shall, however, only make assumptions on the operators L and L^1, where $L[y,\varepsilon]=A_1(t,\varepsilon)\,y'+A_0(t,\varepsilon)\,y$,

$$L^1[y,\varepsilon] = \frac{\partial A_1}{\partial\varepsilon}(t,\varepsilon)\,y' + \frac{\partial A_0}{\partial\varepsilon}(t,\varepsilon)\,y. \tag{5.11}$$

Theorem 2. *Let the conditions of Theorem 1 apply to (1.1), (1.2). Let (1.1), (1.2) be such that it may be written in the form (5.3) with $\lambda=1/\varepsilon$ for which the equivalent permissible boundary form is independent of ε. Let the eigenvalues of (1.1), (1.2) be analytic functions of ε, $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$, and let the degenerate eigenvalue problem have only simple eigenvalues. Let (5.3) be normal and definite $[1, 0; I]$ and normal and definite $[0, 1; I]$. Let the operator L^1 as given in (5.11) be such that $\langle L^1[y,\varepsilon], y\rangle\geqq 0$ for y in $\mathscr{L}$.*

Then $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_n(\varepsilon)=\lambda_n(0)<\infty$ for every $n=1, 2, \dots$. The values $\lambda_n(0)$ are eigenvalues of the degenerate problem. For small values of ε the behavior of all eigenvalues $\lambda_n(\varepsilon)$ is given by an asymptotic series with respect to powers of ε.

Remark. A problem that is normal and definite $[0, 1; T]$, and normal and definite $[1, 0; T]$, can always be adjusted to be self-adjoint, that is, normal and definite $[0, 1; I]$ as well as normal and definite $[1, 0; I]$.

Proof of Theorem 2. If $\lambda(\varepsilon)$ is any eigenvalue that is analytic for $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$, and $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda(\varepsilon)=\lambda_0$, then $\lambda(\varepsilon)$ is a solution of $\Delta(\varepsilon,\lambda)=0$ and $\lambda(0)=\lambda_0$; hence λ_0 is a solution of the degenerate eigenvalue problem, and $\lambda(\varepsilon)$ is one of the eigenvalues that we have constructed. Thus the proof of Theorem 2 is reduced to the proof of

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_n(\varepsilon) = \lambda_0. \tag{5.12}$$

Let $y(t, \varepsilon)$ be an eigenvector corresponding to the eigenvalue $\lambda(\varepsilon)$ (which is real) and analytic in ε, $0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0$, and normalized so that $\langle By, y\rangle=1$. Thus,

$$\lambda(\varepsilon)=\langle L[y,\varepsilon], y\rangle = I[y; 1, 0; I]>0. \tag{5.13}$$

Further,

$$\frac{d\lambda}{d\varepsilon}=\left\langle L\left[\frac{\partial y}{\partial\varepsilon},\varepsilon\right], y\right\rangle+\left\langle L[y,\varepsilon], \frac{\partial y}{\partial\varepsilon}\right\rangle+\langle L'[y,\varepsilon], y\rangle.$$

Since

$$\langle By, y\rangle=1, \quad \left\langle B\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}, y\right\rangle+\left\langle By, \frac{\partial y}{\partial\varepsilon}\right\rangle=0, \quad s[y]=0=s\left[\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}\right],$$

and

$$\left\langle L\left[\frac{\partial y}{\partial\varepsilon},\varepsilon\right], y\right\rangle=\left\langle\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}, L[y,\varepsilon]\right\rangle=\left\langle\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}, \lambda(\varepsilon)\,By\right\rangle=\lambda(\varepsilon)\left\langle\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}, By\right\rangle.$$

Thus,

$$\left\langle L\left[\frac{\partial y}{\partial\varepsilon},\varepsilon\right], y\right\rangle+\left\langle L[y,\varepsilon], \frac{\partial y}{\partial\varepsilon}\right\rangle=\lambda(\varepsilon)\left\{\left\langle\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}, By\right\rangle+\left\langle By, \frac{\partial y}{\partial\varepsilon}\right\rangle\right\}=0,$$

and $d\lambda/d\varepsilon$ becomes

$$\frac{d\lambda}{d\varepsilon}=\langle L'[y,\varepsilon], y\rangle\geqq 0. \tag{5.14}$$

Hence $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda(\varepsilon)$ exists since $\lambda(\varepsilon)$ is non-negative and a non-increasing function of ε as ε decreases. This completes the proof of Theorem 2.

6. Examples

To illustrate the results of this paper consider the following eigenvalue problem considered by Lord Rayleigh [8], which is a special case of a problem considered by J. Moser [7]:

$$\varepsilon^2\frac{d^4x}{dt^4}-\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda x, \qquad 0\leqq t\leqq 1,$$

$$x(0)=x'(0)=x(1)=x'(1)=0, \qquad \varepsilon \text{ small and positive.}$$

Let y be the vector with components y_i, where $y_1=x$, $y_2=-x'+\varepsilon^2x''$, $y_3=\varepsilon x''$, $y_4=\varepsilon^2 x'''$. y will satisfy the differential system

$$y'=\left\{\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\right\}y, \tag{6.1}$$

and the boundary conditions for y corresponding to those for x will be

$$s[y,\varepsilon]=My(0,\varepsilon)+Ny(1,\varepsilon)=0, \tag{6.2}$$

where

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad N=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}.$$

We see that $A_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, which has ± 1 as characteristic roots, and the transformation $y=Tz$, where

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

will change (6.1) and (6.2) into

$$(6.3)\qquad z'=\left\{\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}z,$$

$$(6.4)\qquad t[z,\varepsilon]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}z(0,\varepsilon)+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}z(1,\varepsilon)=0.$$

Thus

$$\Gamma-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

which has maximum possible rank, and we may choose

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

so that

$$(6.5)\qquad \hat{t}[z,\varepsilon]=F\,t[z,\varepsilon]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}z(0,\varepsilon)+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}z(1,\varepsilon),$$

$$\hat{\Gamma}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Since $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ has rank two, Theorem 1 applies to the eigenvalue problem (6.1), (6.2) with $\alpha=\frac{1}{\varepsilon}$.

The problem (6.1), (6.2) is symmetrizable under the transformation U,

$$(6.5)\qquad U=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & -\varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

where $U^* = -U$, $MU^{-1}M^* = NU^{-1}N^* = 0$. Hence (6.1), (6.2) can be written as the self-adjoint problem

$$(6.6)\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y,$$

$$(6.2)\qquad M\,y(0,\varepsilon) + N\,y(1,0) = 0.$$

In this case,

$$I[y:1,0;I] = \int_0^1 x\{\varepsilon^2 x^{(1v)} - x^{11}\}\,dt = \lambda \int_0^1 x^2\,dt,$$

and if $\int_0^1 x^2 = 1$, then an integration by parts shows that

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon^2 \int_0^1 (x^{11})^2\,dt + \int_0^1 (x^1)^2\,dt;$$

hence

$$\lambda(\varepsilon) \geqq 0 \quad\text{and}\quad \frac{d\lambda}{d\varepsilon} \geqq 0.$$

The more general eigenvalue problem of the form $(P + \varepsilon^{2n-2m} Q)\,x = \lambda x$, where P and Q are linear differential operators of order $2m$ and $2n$ respectively, $n > m$, with n boundary conditions prescribed at each end point, $t = a$, $t = b$, has been treated by J. Moser [7].

$$P x = \sum_{k=1}^{2m} p_k(t)\, x^{(k)}(t), \qquad Q x = \sum_{k=1}^{2n} q_k(t)\, x^{(k)}(t), \qquad x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}, \qquad a \leqq t \leqq b,$$

$p_k(t)$, $q_k(t)$ are infinitely differentiable real functions, with boundary conditions

$$\begin{aligned} A_r x &= x^{(\alpha_r)}(a) + \sum_{s<\alpha_r} a_{rs}\, x^{(s)}(a) = 0 \\ B_r x &= x^{(\beta_r)}(b) + \sum_{s<\beta_r} b_{rs}\, x^{(s)}(b) = 0 \end{aligned} \qquad (r = 1, \ldots, n),$$

where a_{rs} and b_{rs} are constants.

If we let y be the vector with components y_i, where

$$\begin{aligned} y_i &= x^{(i-1)}, & i &= 1, \ldots, 2m-1 \\ y_{2m} &= x^{(2m-1)} + q_{2n}/p_{2m}\, y_{2n}, \\ y_{2m+j} &= x^{(2m+j-1)}, & j &= 1, \ldots, 2n-2m, \end{aligned}$$

then y will satisfy a differential system of the type (1.1) with $\alpha = 1/\varepsilon$ where $B(t,\varepsilon)$ is a polynomial in ε of degree at most $2n-2m$ and $A(t)$ has the form

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{-p_{2m}}{q_{2n}} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

The characteristic roots of A_{22} are the roots of the equation $q_{2n}\beta^{2n-2m}+p_{2m}=0$, and if $(-1)^n q_{2n}>0$, $(-1)^m p_{2m}>0$, the characteristic roots will have non-zero real parts. The boundary conditions A_r and B_r may be written in the form (1.2). In particular, if $\alpha_m<2m$, $\beta_m<2m$, $A_r x=x^{(\alpha_r)}$, $B_r x=x^{(\beta_r)}$, $r=m+1,\ldots,n$, then the boundary form may be chosen independent of ε.

If P and Q are formally self-adjoint, $Px=\sum_{k=0}^{m}(\hat{p}_k x^{(k)})^{(k)}$, $Qx=\sum_{k=0}^{n}(\hat{q}_k x^{(k)})^{(k)}$, then $P+\varepsilon^{2n-2m}Q$ is formally self-adjoint, $(P+\varepsilon^{2n-2m}Q)\,x=\sum_{k=0}^{n}(r_k x^{(k)})^{(k)}$. Let φ be the vector with components φ_j, where $\varphi_j=x^{(j-1)}$, $j=1,\ldots,n$, $\varphi_{n+j}=(-1)^j\{r_j x^{(j)}+(r_{j+1}x^{(j+1)})'+\cdots+(r_n x^{(n)})^{(n-j)}\}$, $j=1,\ldots,n$. The vector φ will satisfy a first order differential system that is symmetrizable under the transformation $J=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}$ (see [11], p. 419; [3], p. 206). Further, $\varphi=V(t,\varepsilon)\,y$; hence the differential system for y is symmetrizable under the transformation $U(t,\varepsilon)=V^*(t,\varepsilon)\,J\,V(t,\varepsilon)=-U^*$.

The differential system for y may be written in self-adjoint form by multiplication on the left by U^*, and in the resulting self-adjoint form the matrix coefficient of λ has 1 in the first row and column and 0 elsewhere. Thus

$$I[y:1,0;I]=\lambda(\varepsilon)\int_a^b x^2\,dt=\int_a^b x\,P\,x\,dt+\varepsilon^{2n-2m}\int_a^b x\,Q\,x\,dt.$$

Further, if $(-1)^m p_{2m}>0$, $(-1)^n q_{2n}>0$, the problem could have been adjusted so that $\int_a^b u\,P u\,dt\geqq 0$, $\int_a^b u\,Q u\,dt\geqq 0$ for all u satisfying the boundary conditions $A_r u=0$, $B_r u=0$, $r=1,\ldots,n$. Hence, $\lambda(\varepsilon)\geqq 0$, $\dfrac{d\lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon}\geqq 0$.

This paper was sponsored by Mathematics Research Center, U.S.Army, Madison, Wisconsin, under Contract No. DA-11-022-ORD-2059.

References

[1] BLISS, G. A.: Definitely self-adjoint boundary value problems. Trans. Amer. Math. Soc. **44**, 413–428 (1938).

[2] CHAPIN, G., JR.: One and two point boundary value problems for ordinary linear differential equations containing a parameter. Ph. D. thesis, University of Minnesota 1959.

[3] CODDINGTON, E. A., & N. LEVINSON: Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill 1955.

[4] HARRIS, W. A., JR.: Singular perturbations of two-point boundary problems for systems of ordinary differential equations. Arch. Rational Mech. Anal. **5**, 212–225 (1960).

[5] KATO, T.: Perturbation theory of semi-bounded operators. Math. Ann. **125**, 435–447 (1953).

[6] KRAMER, V.: Investigations in asymptotic perturbation series. Ph. D. thesis, University of California (Berkeley) 1954.

[7] MOSER, J.: Singular perturbations of eigenvalue problems for linear differential equations of even order. Comm. Pure and Appl. Math. **8**, 251–278 (1955).

[8] LORD RAYLEIGH: The Theory of Sound, Vol. I. London: MacMillan 1927.

[9] REID, W. T.: Some remarks on linear differential systems. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 414–419 (1939).

[10] Reid, W. T.: A new class of self-adjoint boundary value problems. Trans. Amer. Math. Soc. **52**, 381—425 (1942).
[11] Reid, W. T.: A class of two-point boundary problems. Ill. J. of Math. **2**, 434—453 (1958).
[12] Turrittin, H. L.: Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary linear differential equations containing a parameter. Ann. of Math. Studies, No. 29, 81—116 (1952).
[13] Wasow, W.: On the asymptotic solutions of boundary value problems for ordinary differential equations containing a parameter. J. Math. Phys. **23**, 173—183 (1944).

Mathematics Research Center
U.S.Army
University of Wisconsin
Madison, Wisconsin
and
University of Minnesota
Mineapolis, Minnesota

(Received November 23, 1960)

Über Instabilitätsbereiche eines numerischen Verfahrens zur Lösung des Cauchy-Problems für hyperbolische Differentialgleichungen

R. ANSORGE und W. TÖRNIG

Vorgelegt von L. COLLATZ

1. Einleitung

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf die von einem der Verfasser mitgeteilten Verfahren zur numerischen Lösung des Cauchy-Problems bei partiellen hyperbolischen Differentialgleichungen 2. Ordnung [2].

Vorgelegt sei das Cauchy-Problem

$$\begin{gathered} z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y), \\ z(x, x) = a(x), \quad z_x(x, x) = b(x), \quad z_y(x, x) = c(x). \end{gathered} \tag{1.1}$$

(In [2] wird gezeigt, wie man das allgemeine Problem auf (1.1) zurückführen kann.) Zur Lösung werden die in [2] angegebenen Verfahren benutzt. Bei exakter Rechnung (die infolge unvermeidbarer Rundungen im allgemeinen nicht durchführbar ist) liefere das Verfahren bei Berechnung der Werte oberhalb $y=x$ auf den zu der Anfangsgeraden g_0: $y=x$ parallelen Geraden g_n: $y=x+nh$ die Lösungen

$$z_{r,r+n}, z_{xr,r+n}, z_{yr,r+n} \qquad (r=0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n=1, 2, 3, \ldots, N). \tag{1.2}$$

Diese unterscheiden sich von den exakten Lösungen des Problems (1.1) noch durch den hier nicht betrachteten Verfahrensfehler. Benutzt man nun auf den Geraden g_n für die weitere Rechnung statt (1.2) die durch Rundungsfehler etwas verfälschten Werte

$$z_{r,r+n} + \eta_{r,r+n}, \quad z_{xr,r+n} + \eta_{xr,r+n}, \quad z_{yr,r+n} + \eta_{yr,r+n}, \tag{1.3}$$

so liefert das Verfahren auf den Geraden g_σ ($\sigma=N+1,\ N+2, \ldots$) unter der Voraussetzung, daß exakt weitergerechnet wird, veränderte Werte

$$z_{r,r+\sigma} + \eta_{r,r+\sigma}, \quad z_{xr,r+\sigma} + \eta_{xr,r+\sigma}, \quad z_{yr,r+\sigma} + \eta_{yr,r+\sigma}. \tag{1.4}$$

Wir nennen das Verfahren stabil, wenn die Fehlervektoren

$$\mathfrak{z}'_{r,r+\sigma} = (\eta_{r,r+\sigma}\ \eta_{xr,r+\sigma}\ \eta_{yr,r+\sigma}) \tag{1.5}$$

für alle r mit wachsendem σ bei beliebiger Anfangsfehlerverteilung beschränkt bleiben. Andernfalls heiße das Verfahren instabil.

2. Voraussetzungen

Es stößt auf große Schwierigkeiten, die Frage nach dem Instabilitätsbereich in voller Allgemeinheit beantworten zu wollen. Aus diesem Grunde wird in der Literatur bei ähnlichen Problemen im allgemeinen davon ausgegangen, daß das Differentialgleichungsproblem linear ist und die Koeffizienten im betrachteten Bereich als konstant angesehen werden können. Weiterhin wird in der Regel von einer bestimmten Anfangsfehlerverteilung ausgegangen. Auch in dieser Arbeit wird von diesen einschränkenden Voraussetzungen nicht abgegangen. Es gelingt dann, Bereiche anzugeben, in denen das Verfahren für die gewählte Anfangsfehlerverteilung instabil ist und daher auch allgemein als instabil bezeichnet werden muß.

Das Problem (1.1) laute also

$$\begin{gathered} z_{xy} = g(x,y) + Az + Bz_x + Cz_y, \\ z(x,x) = a(x), \quad z_x(x,x) = b(x), \quad z_y(x,x) = c(x) \end{gathered} \tag{2.1}$$

mit konstanten A, B, C. Auf einer ersten Geraden g_n seien alle Fehlervektoren gleich groß, d.h. $\mathfrak{z}_{r,r+n}$ ist unabhängig von r. Bis zur Geraden g_{n-1} sei exakt gerechnet worden. Diese Voraussetzung ist nicht einschneidender als die, daß exakt weitergerechnet wird.

3. Instabilität des Verfahrens

Es genügt, die Instabilität des Interpolationsverfahrens für die fortlaufende Rechnung zu untersuchen, sofern nicht ausschließlich mit dem Extrapolationsverfahren gerechnet wird. Wir beschränken uns dabei auf die Formeln zur Berechnung von Werten oberhalb $y=x$, weil man bei der Untersuchung der Werte unterhalb $y=x$ letztlich nur h durch $-h$ zu ersetzen hat.

Das Interpolationsverfahren m-ter Ordnung zur Berechnung der Werte oberhalb $y=x$ lautet:

$$\begin{gathered} z_{r,s+1}^{[\varkappa+1]} - \left\{ z_{r,s} + h \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_{m,\mu}^{*} q_{r+\mu,s+\mu} - h^2 \left[\alpha_{0,0}^{*\,m} f_{r,s+1}^{[\varkappa+1]} + \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu,\nu \neq 0,0}}^{m} \sum_{\nu=0}^{m-\mu} \alpha_{\mu,\nu}^{*\,m} f_{r+\mu,s+1-\nu} \right] \right\} = 0 \\ p_{r,s+1}^{[\varkappa+1]} - \left\{ p_{r,s} + h \left[\alpha_{m,0}^{*} f_{r,s+1}^{[\varkappa+1]} + \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{m,\nu}^{*} f_{r,s+1-\nu} \right] \right\} = 0 \\ q_{r,s+1}^{[\varkappa+1]} - \left\{ q_{r+1,s+1} - h \left[\alpha_{m,0}^{*} f_{r,s+1}^{[\varkappa+1]} + \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{m,\mu}^{*} f_{r+\mu,s+1} \right] \right\} = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Dabei sind die üblichen Abkürzungen $p=z_x$, $q=z_y$ benutzt worden. Die Werte der auftretenden Gewichte entnehme man [2]. Nach (2.1) ist hier zu setzen

$$f(x,y,z,p,q) = g(x,y) + Az + Bp + Cq.$$

Die Schrittweite h sei so gewählt, daß das Iterationsverfahren (3.1) konvergiert (s. [2]). Die Iterationen seien jeweils bis zum Stillstand durchgeführt, so daß die Indizes $[\varkappa]$ fortgelassen werden können. Dann kann (3.1) als implizites Gleichungssystem für die Werte $z_{r,s+1}$, $p_{r,s+1}$, $q_{r,s-1}$ aufgefaßt werden. Es liefert

auf g_{s+1-r} für

$$\begin{pmatrix} z_{r,s+1} \\ p_{r,s+1} \\ q_{r,s+1} \end{pmatrix} \quad \text{verfälschte Vektoren} \quad \begin{pmatrix} z_{r,s+1} + \eta_{r,s+1} \\ p_{r,s+1} + \eta_{x_{r,s+1}} \\ q_{r,s+1} + \eta_{y_{r,s+1}} \end{pmatrix},$$

sofern die in (3.1) auftretenden Werte längs der verschiedenen vorangehenden Geraden g_σ $(\sigma < s+1-r)$ mit Fehlern behaftet sind. Wie man leicht einsieht, errechnet sich dann der Vektor

$$\mathfrak{z}'_{r,s+1} = (\eta_{r,s+1} \ \eta_{x_{r,s+1}} \ \eta_{y_{r,s+1}})$$

aus einer Matrizengleichung der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{[m]} \mathfrak{z}_{r,s+1} &= \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu,\nu\neq 0,0}}^{m} \sum_{\nu=0}^{m-\mu} \mathfrak{A}^{[m]}_{\mu,\nu} \mathfrak{z}_{r+\mu,s+1-\nu} \qquad \text{für } m \geqq 1, \\ \mathfrak{A}^{[0]} \mathfrak{z}_{r,s+1} &= \mathfrak{A}^{[0]}_{0,1} \mathfrak{z}_{r,s} + \mathfrak{A}^{[0]}_{1,0} \mathfrak{z}_{r+1,s+1} \qquad \text{für } m = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ist g_n die erste Gerade, auf der die Werte mit Rundungsfehlern behaftet sind, und sind die Fehlervektoren $\mathfrak{z}_{r,r+n}$ längs g_n alle gleich, also unabhängig von r, so sind nach (3.2) auch alle Fehlervektoren $\mathfrak{z}_{r,r-n+k}$ längs g_{n+k} $(k = 1, 2, \ldots)$ gleich. Wir schreiben deshalb $\mathfrak{z}_\sigma$ statt $\mathfrak{z}_{r,r+\sigma}$ und erhalten mit (3.2)

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{[m]} \mathfrak{z}_{\sigma+1} &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \mathfrak{B}^{[m]}_\nu \mathfrak{z}_{\sigma-\nu} \qquad \text{für } m \geqq 1, \\ \mathfrak{A}^{[0]} \mathfrak{z}_{\sigma+1} &= \mathfrak{B}^{[0]}_0 \mathfrak{z}_\sigma \qquad \text{für } m = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Für die weiteren Betrachtungen ist es im Falle $m \geqq 2$ zweckmäßig, die folgenden Fehlervektoren $\mathfrak{u}^{[m]}_s$ einzuführen:

$$\mathfrak{u}^{[m]}_s = \begin{pmatrix} \eta_s \\ \eta_{x_s} \\ \eta_{y_s} \\ \eta_{s-1} \\ \eta_{x_{s-1}} \\ \eta_{y_{s-1}} \\ \vdots \\ \eta_{s-m+1} \\ \eta_{y_{s-m+1}} \\ \eta_{y_{s-m+1}} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Dann ist (3.3) äquivalent einer Gleichung

$$\mathfrak{K}^{[m]} \mathfrak{u}^{[m]}_{\sigma+1} = \mathfrak{C}^{[m]} \mathfrak{u}^{[m]}_\sigma. \tag{3.5}$$

Für die Determinante der Matrix $\mathfrak{K}^{[m]}$ gilt: $|\mathfrak{K}^{[m]}| = |\mathfrak{A}^{[m]}|$. Sie sei von Null verschieden. Dann ist

$$\mathfrak{u}^{[m]}_{\sigma+1} = \mathfrak{K}^{[m]^{-1}} \mathfrak{C}^{[m]} \mathfrak{u}^{[m]}_\sigma = \mathfrak{P}^{[m]} \mathfrak{u}^{[m]}_\sigma$$

und daher

$$\mathfrak{u}^{[m]}_{\sigma+k} = \mathfrak{P}^{[m]k} \mathfrak{u}^{[m]}_\sigma. \tag{3.6}$$

Gemäß unserer Definition ist das Verfahren somit höchstens dann stabil, wenn die Folge der Matrizenpotenzen $\{\mathfrak{P}^{[m]k}\}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ beschränkt bleibt. Im anderen Fall ist das Verfahren sicher instabil. Für die Beschränktheit der Folge $\{\mathfrak{P}^{[m]k}\}$ ist es notwendig, daß kein Eigenwert der Matrix $\mathfrak{P}^{[m]}$ dem Betrage nach größer als 1 ist. Sind alle Eigenwerte dem Betrage nach kleiner als 1, so konvergiert die Folge $\{\mathfrak{P}^{[m]k}\}$ gegen die Nullmatrix. Gilt $|\lambda_i|=1$ für nur einen Eigenwert, während alle anderen Eigenwerte dem Betrage nach kleiner als 1 sind, so bleibt die Matrizenfolge beschränkt. Sind mehrere Eigenwerte dem Betrage nach gleich 1, so kann die Folge sowohl beschränkt als auch unbeschränkt sein.

4. Der Fall $m=0$

Die in (3.3) auftretenden Matrizen $\mathfrak{A}^{[0]}$ und $\mathfrak{B}_0^{[0]}$ ergeben sich zu

$$\mathfrak{A}^{[0]}=\begin{pmatrix} 1+\frac{h^2}{2}A & \frac{h^2}{2}B & \frac{h^2}{2}C \\ -hA & 1-hB & -hC \\ hA & hB & 1+hC \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B}_0^{[0]}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zu untersuchen sind die Eigenwerte von $\mathfrak{A}^{[0]-1}\mathfrak{B}_0^{[0]}$. Diese Eigenwerte sind

$$\lambda_1=1; \qquad \lambda_{2,3}=\frac{1}{2}+\frac{1-h^2A}{2|\mathfrak{A}^{[0]}|}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1-h^2A}{2|\mathfrak{A}^{[0]}|}\right)^2-\frac{h^2A}{|\mathfrak{A}^{[0]}|}}. \tag{4.1}$$

Dabei ist

$$|\mathfrak{A}^{[0]}|=1+hC-hB+\frac{h^2}{2}A.$$

Abkürzend setzen wir $h^2A=\alpha$, $hC-hB=\beta$ und ermitteln den Instabilitätsbereich in der α-β-Ebene, da nach (4.1) die Stabilität im wesentlichen von diesen beiden Größen abhängt (im Falle $\alpha=0$ muß die Größe von B noch in Betracht gezogen werden).

In genau folgenden Bereichen sind λ_2 und λ_3 dem Betrage nach kleiner als 1 und damit die Folge $\{[\mathfrak{A}^{[0]-1}\mathfrak{B}_0^{[0]}]^k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ beschränkt (s. Abb. 1):

$$\begin{array}{ll} 1. & \alpha<0, \quad \beta<-2 \\ 2. & 0<\alpha\leqq 4, \quad \beta>-\frac{\alpha}{2}; \quad \alpha>4, \quad \beta>-2. \end{array} \tag{4.2}$$

Auf den Rändern

$$\begin{array}{ll} \alpha<0, & \beta=-2; \\ \alpha=0, & \beta\leqq-2; \\ \alpha=0, & \beta\geqq 0; \\ 0<\alpha\leqq 4, & \beta=-\frac{\alpha}{2}; \\ \alpha>4, & \beta=-2 \end{array} \tag{4.3}$$

dieser Gebiete ist mindestens einer der beiden Eigenwerte λ_2 und λ_3 dem Betrage nach gleich 1, während nur in der restlichen α-β-Ebene mindestens ein Eigenwert dem Betrage nach größer als 1 ist. Es bleibt also noch das Verhalten der Folge auf den Rändern (4.3) zu untersuchen.

Wie man mit Hilfe der Jordanschen Normalform einer Matrix erkennt, kann im Falle $|\lambda_j| \leq 1$, $(j=1, 2, \ldots)$ die Beschränktheit unserer Matrizenfolge auf dem Rande höchstens dann gestört sein, wenn mindestens zwei Eigenwerte einander gleich und dem Betrage nach gleich 1 sind. Das ist nur möglich auf der Geraden $\alpha=0$ (dann ist $\lambda_1=\lambda_2=1$) und im Punkte $\alpha=4$, $\beta=-2$ (dann ist $\lambda_2=\lambda_3=-1$). In allen anderen Randpunkten ist unsere Matrizenfolge daher beschränkt. Da der Fall $\alpha=4$, $\beta=-2$ aus weiter unten genannten Gründen nicht interessiert, geben wir noch das Ergebnis im Falle $\alpha=0$. Hier besteht Beschränktheit der Folge $\{[\mathfrak{A}^{[0]-1}\mathfrak{B}_0^{[0]}]^k\}$ nur, wenn $B=0$ und dann $\beta>0$ oder $\beta\leqq-2$ ist.

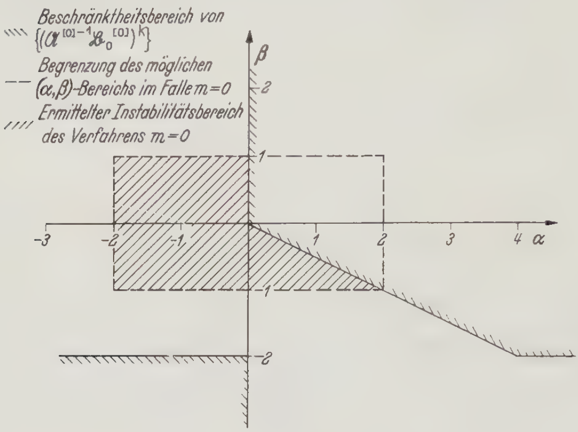

Abb. 1

Auf Grund der Konvergenzbedingung für die Iteration der fortlaufenden Rechnung können nun aber die Werte α und β a priori gewisse Schranken nicht überschreiten. Der Durchschnitt des dadurch definierten Wertebereichs mit der Komplementärmenge des oben angegebenen Beschränktheitsbereichs der Matrizenfolge liefert somit den Instabilitätsbereich des Verfahrens für die eingangs beschriebene Anfangsfehlerverteilung.

Die Konvergenzbedingung lautet

$$h < 2\left(\sqrt{1+\frac{1}{2M}}-1\right), \tag{4.4}$$

wobei M die Lipschitz-Konstante für die Bedingung

$$|f(x, y, z_2, p_2, q_2) - f(x, y, z_1, p_1, q_1)| \leqq M\left(|z_2-z_1|+|p_2-p_1|+|q_2-q_1|\right)$$

darstellt. Man wird $M=\operatorname{Max}\{|A|, |B|, |C|\}$ wählen und mit diesem M die Schrittweite h aus (4.4) bestimmen. Dann folgt

$$\begin{aligned} |\alpha| &\leq h^2 M < 2 - 8M\left(\sqrt{1+\frac{1}{2M}}-1\right) \leqq 2, \\ |\beta| &\leqq 2hM < 4M\left(\sqrt{1+\frac{1}{2M}}-1\right) \leqq 1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Somit ergibt sich folgender Instabilitätsbereich (s. Abb. 1):

$$\begin{array}{lll} \alpha<0, & \beta \text{ beliebig}; & \\ \alpha=0, & B\neq 0, & \beta \text{ beliebig}; \\ \alpha=0, & B=0, & \beta\leq 0; \\ \alpha>0, & \beta<-\frac{\alpha}{2}. & \end{array}$$

Im Falle der Berechnung der Werte unterhalb $y=x$ ist h durch $-h$ zu ersetzen.

5. Der Fall $m=1$

Die in (3.3) auftretenden Matrizen $\mathfrak{A}^{[1]}$ und $\mathfrak{B}_0^{[1]}$ lauten:

$$\mathfrak{A}^{[1]}=\begin{pmatrix} 1+\frac{h^2}{6}A & \frac{h^2}{6}B & \frac{h^2}{6}C \\ -\frac{h}{2}A & 1-\frac{h}{2}B & -\frac{h}{2}C \\ \frac{h}{2}A & \frac{h}{2}B & 1+\frac{h}{2}C \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}_0^{[1]}=\begin{pmatrix} 1-\frac{h^2}{3}A & -\frac{h^2}{3}B & h-\frac{h^2}{3}C \\ \frac{h}{2}A & 1+\frac{h}{2}B & \frac{h}{2}C \\ -\frac{h}{2}A & -\frac{h}{2}B & 1-\frac{h}{2}C \end{pmatrix}.$$

Die zu untersuchenden Eigenwerte von $\mathfrak{A}^{[1]^{-1}}\mathfrak{B}_0^{[1]}$ sind:

$$\lambda_1=1; \qquad \lambda_{2,3}=\frac{1-\frac{h^2}{3}A}{|\mathfrak{A}^{[1]}|}\pm\sqrt{\left(1-\frac{1-\frac{h^2}{3}A}{|\mathfrak{A}^{[1]}|}\right)^2-\frac{h^2A}{|\mathfrak{A}^{[1]}|}} \tag{5.1}$$

mit

$$|\mathfrak{A}^{[1]}|=1+\frac{h}{2}C-\frac{h}{2}B+\frac{h^2}{6}A.$$

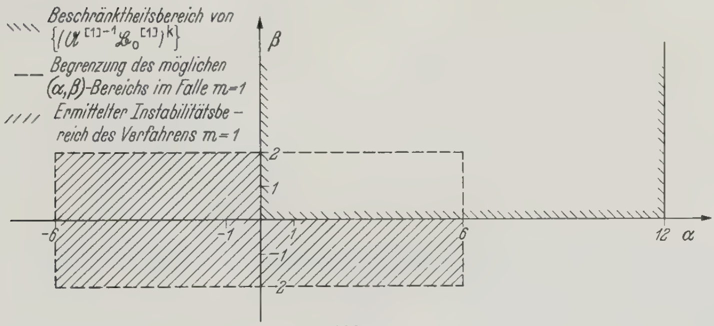

Abb. 2

Die Betrachtungen zur Ermittlung des Instabilitätsbereichs verlaufen zu denen in 4. analog, so daß wir uns hier kürzer fassen können. Die Konvergenzbedingung für die Iteration der fortlaufenden Rechnung lautet jetzt

$$h<3\left(\sqrt{1+\frac{2}{3M}}-1\right).$$

Mit $M=\operatorname{Max}\{|A|,|B|,|C|\}$ und den gleichen Abkürzungen wie in 4. folgt

$$|\alpha|\leqq 6, \qquad |\beta|\leqq 2.$$

Innerhalb dieses α-β-Bereichs besteht Instabilität, wenn (s. Abb. 2)

$$\begin{aligned} &\alpha<0, && \beta \text{ beliebig;} \\ &\alpha=0, && B\neq 0, \quad \beta \text{ beliebig;} \\ &\alpha=0, && B=0, \quad \beta\leqq 0; \\ &\alpha>0, && \beta<0. \end{aligned}$$

Im Falle der Berechnung der Werte unterhalb $y=x$ ist h durch $-h$ zu ersetzen.

6. Der Fall $m=2$

Wir betrachten noch den Fall $m=2$ und bilden zunächst ähnlich wie in 4. und 5. die Matrizen $\mathfrak{A}^{[2]}$, $\mathfrak{B}_0^{[2]}$ und $\mathfrak{B}_1^{[2]}$ und mit ihnen die Matrix

$$\mathfrak{P}^{[2]} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{[2]^{-1}} \mathfrak{B}_0^{[2]} & \mathfrak{A}^{[2]^{-1}} \mathfrak{B}_1^{[2]} \\ \mathfrak{E} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}.$$

Zu bestimmen sind die 6 Eigenwerte dieser Matrix. Man errechnet $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Die restlichen 3 Eigenwerte sind die Wurzeln der Gleichung

$$(\lambda-1)^3 + \frac{1+\frac{13}{12}\alpha+\frac{3}{2}\beta}{|\mathfrak{A}^{[2]}|}(\lambda-1)^2 + \frac{2\alpha+\beta}{|\mathfrak{A}^{[2]}|}(\lambda-1) + \frac{\alpha}{|\mathfrak{A}^{[2]}|} = 0 \tag{6.1}$$

mit

$$|\mathfrak{A}^{[2]}| = 1 + \tfrac{5}{12}\beta + \tfrac{1}{24}\alpha.$$

Dabei wurden die gleichen Abkürzungen wie früher benutzt. Das Verfahren ist sicher dann instabil, wenn eine der Lösungen von (6.1) dem Betrage nach größer als 1 ist, was sich für jede spezielle Differentialgleichung leicht nachprüfen läßt. Im Falle mehrfacher Eigenwerte vom Betrag 1, z.B. für $\alpha=0$, kann wiederum die Transformation der Matrix $\mathfrak{P}^{[2]}$ auf die Jordansche Normalform Auskunft über die Beschränktheit der Folge $\{\mathfrak{P}^{[2]^k}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ geben.

Die Verfasser danken Herrn Dr.-Ing. R. Zurmühl für einen matrizen-theoretischen Hinweis.

Literatur

[1] Richtmyer, R. D.: Difference Methods for Initial-Value Problems. New York: Interscience Publishers 1957.

[2] Törnig, W.: Zur numerischen Behandlung von Anfangswertproblemen partieller hyperbolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen. II. Das Cauchy-Problem. Arch. Rational Mech. Anal. **4**, 446—466 (1960).

Institut für Mathematik und Mechanik
der Bergakademie Clausthal
Clausthal-Zellerfeld

(Eingegangen am 19. Dezember 1960)

Fehlerabschätzungen bei hyperbolischen Differentialgleichungen

WOLFGANG WALTER

Vorgelegt von H. COLLATZ

1. Einleitung

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, für die hyperbolische Differentialgleichung

$$(1) \qquad u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \qquad [\text{bzw.} = f(x, y, u)]$$

Abschätzungssätze aufzustellen. Daneben werden auch Systeme von solchen Differentialgleichungen und einige verwandte Probleme betrachtet. Von den verschiedenen Aufgaben für die Gleichung (1) behandeln wir die charakteristische und die Cauchysche Anfangswertaufgabe; genauer gesagt legen wir eine von KISYNSKI [5] angegebene allgemeinere Formulierung zugrunde. Sie bietet den Vorteil der gleichzeitigen Behandlung von charakteristischem und Cauchyschem Problem. Mit Existenzfragen beschäftigen wir uns hier nicht; Existenzsätze unter sehr schwachen Voraussetzungen über f finden sich in [8], [9].

In Arbeiten von DIAZ [6], TÖRNIG [10] und MOORE [11] wurden Verfahren zur numerischen Behandlung der Gleichung (1) untersucht. Es handelt sich dabei um die Übertragung von Verfahren, die bei gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannt sind, etwa des Euler-Cauchy-Polygonzugverfahrens, der Extrapolations- und Interpolationsverfahren, auf hyperbolische Differentialgleichungen (in [11] wird eine Übertragung des Runge-Kutta-Verfahrens angekündigt). Hier soll nicht ein weiteres Verfahren zur näherungsweisen Berechnung einer Lösung besprochen werden. Vielmehr werden allgemeine Sätze bewiesen, welche gestatten, von einer vorliegenden Näherungslösung auf das Verhalten der Lösung zu schließen. Es werden dazu zwei verschiedene Arten von Sätzen angegeben. Bei den Sätzen der ersten Art — sie werden mit A bezeichnet — handelt es sich im wesentlichen darum, die bei gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannten Begriffe Unterfunktion, Oberfunktion auf zweidimensionale Probleme auszudehnen. So besteht z.B. der folgende Sachverhalt: Liegen bei einem charakteristischen Anfangswertproblem die Anfangswerte der Funktion $v(x, y)$ unterhalb, die Anfangswerte von $w(x, y)$ oberhalb der für die Lösung vorgeschriebenen Anfangswerte und ist $v_{xy} \leqq f(x, y, v)$, $w_{xy} \geqq f(x, y, w)$, so liegt die Lösung zwischen $v(x, y)$ und $w(x, y)$. Wir nennen dann v eine Unterfunktion, w eine Oberfunktion. Aussagen dieser Art sind jedoch nur möglich, wenn die

Funktion f gewisse Monotonieeigenschaften besitzt. Bei den Sätzen der zweiten Art — wir bezeichnen sie mit B — werden Abschätzungen für die Differenz „Lösung minus Näherungslösung" angegeben, bei welchen der „Defekt" der Näherungslösung, das ist die Größe $v_{xy} - f(x, y, v, \ldots)$ in die Abschätzungsformel eingeht. Sie sind für beliebige rechte Seiten anwendbar. Der Spezialfall der Lipschitz-Abschätzung von f wird näher dargelegt. Er führt zu einfachen Fehlerabschätzungen, die sich numerisch leicht auswerten lassen.

Mit Hilfe dieser Sätze ist es möglich, sehr allgemeine Eindeutigkeitssätze für die einzelnen behandelten Probleme aufzustellen. So kann man ohne Mühe jene Sätze, welche SATŌ [*4*] für nichtlineare Volterra-Integralgleichungen in einer unabhängigen Variablen erzielt hat, auf Integralgleichungen in zwei unabhängigen Variablen, wie sie in Nr. 4 betrachtet werden, übertragen. Für die hyperbolische Differentialgleichung (1) wurde in den letzten Jahren das Eindeutigkeitsproblem von verschiedenen Autoren behandelt. Dabei gelang es, eine Reihe neuer Eindeutigkeitskriterien aufzustellen. Alle diese Kriterien (und noch allgemeinere) sind aus den Sätzen der Nr. 5 und 8 ableitbar. Da wir in einer vor kurzem erschienen Arbeit [*12*] auf das Eindeutigkeitsproblem ausführlich eingegangen sind, verzichten wir hier auf eine nähere Diskussion. In [*12*] findet man auch Literaturangaben.

Was die Methode angeht, so stellen wir in Nr. 3 zwei allgemeine Abschätzungssätze für Operatoren an die Spitze. Sie werden in Nr. 4 auf Integralgleichungen, in Nr. 5 auf Differentialgleichungen $u_{xy} = f(x, y, u)$ spezialisiert. In Nr. 7 werden die beiden allgemeinen Sätze auf Vektorfunktionen ausgedehnt. Damit lassen sich dann Systeme von Integralgleichungen sowie Differentialgleichungen der Gestalt $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ (und Systeme solcher Differentialgleichungen) behandeln.

Weitreichende Analogien zum Anfangswertproblem bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, wie sie vom Existenz- und Eindeutigkeitsproblem her bekannt sind, treten auch hier sehr deutlich zu Tage. An gegebener Stelle wird darauf hingewiesen.

Herrn Doz. Dr. K. NICKEL bin ich für manche Anregung zu Dank verpflichtet. Monotone Operatoren von der hier betrachteten Art wurden im eindimensionalen Fall erstmals von ihm eingeführt. Er wird über seine Ergebnisse in einer demnächst erscheinenden Arbeit berichten.

2. Bezeichnungen und Problemstellung

Unsere Betrachtungen beziehen sich auf einen in der (x, y)-Ebene gelegenen abgeschlossenen Grundbereich R. Dieser wird erhalten, indem man von einem Rechteck $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, $(a > 0, b > 0)$ durch einen Schnitt längs einer stetigen, vom Punkt $(0, b_0)$ $(0 \leqq b_0 \leqq b)$ zum Punkt $(a_0, 0)$ $(0 \leqq a_0 \leqq a)$ verlaufenden, monoton fallenden Kurve C_1 ein den Nullpunkt enthaltendes, krummliniges Dreieck abtrennt (s. Abb. 1). Die beiden Extremfälle sind besonders wichtig im Hinblick auf hyperbolische Differentialgleichungen. Der erste liegt dann vor, wenn $a_0 = b_0 = 0$ ist. Es wird dann gar nichts abgeschnitten, d.h. R ist gleich dem ganzen Rechteck. Mit einem solchen rechteckigen Grundbereich hat man es beim charakteristischen Anfangswertproblem für die Gleichung (1) zu tun. Beim zweiten Fall ist $a_0 = a$,

$b_0 = b$. Solche Grundbereiche, die selbst die Form eines krummlinigen Dreiecks haben, treten beim Cauchy-Problem (oder nichtcharakteristischen Anfangswertproblem) auf.

Die Kurve C_1 sei durch eine Funktion $y = \bar{y}(x)$ definiert, welche im Intervall $0 \leqq x \leqq a_0$ stetig und im engeren Sinne monoton fallend ist; sie besitzt demnach eine in $0 \leqq y \leqq b_0$ erklärte Umkehrfunktion $x = \bar{x}(y)$, welche ebenfalls die beiden genannten Eigenschaften hat. Wir erweitern nun den Definitionsbereich der Funktionen $\bar{y}(x)$ und $\bar{x}(y)$, indem wir $\bar{y}(x) = 0$ für $a_0 \leqq x \leqq a$, $\bar{x}(y) = 0$ für $b_0 \leqq y \leqq b$ setzen. Der Grundbereich R kann dann durch jeden der beiden Ausdrücke

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq a,\ \bar{y}(x) \leqq y \leqq b\}$$
$$= \{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq b,\ \bar{x}(y) \leqq x \leqq a\}$$

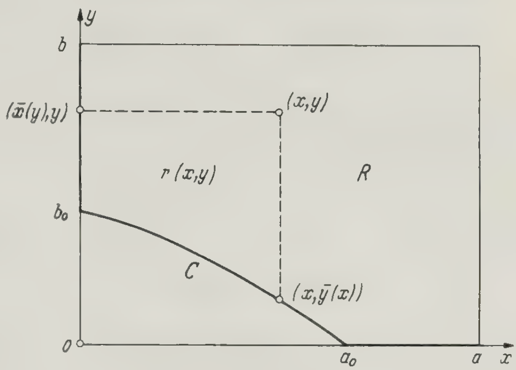

Abb. 1. Das Grundgebiet R

beschrieben werden. Unter $r(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0) \in R$, verstehen wir den Durchschnitt von R mit dem Rechteck $0 \leqq x \leqq x_0$, $0 \leqq y \leqq y_0$.

Die Menge derjenigen Punkte von R, welche auf der Geraden $x = 0$ oder auf der Geraden $y = 0$ oder auf der Kurve C_1 gelegen sind, wird mit C bezeichnet. Wir sprechen auch von der „Anfangskurve“ C, weil bei den Anfangswertaufgaben für hyperbolische Differentialgleichungen auf C Anfangswerte vorgegeben werden. Weiter sei C_{xy} der Durchschnitt von C und $r(x, y)$.

Die Klasse der in R stetigen Funktion $\varphi(x, y)$ wird mit $C^0(R)$, die Klasse der in R stetigen und mit stetigen Ableitungen φ_x, φ_y, φ_{xy} versehenen Funktion φ mit $C^*(R)$ bezeichnet. Die über einer Menge G summierbaren (d.h. im Lebesgueschen Sinne integrierbaren) Funktionen bilden die Klasse $L(G)$.

Weiter werden Operatoren K betrachtet, welche den Raum $C^0(R)$ in sich abbilden; $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(R)$ sei die Klasse dieser Operatoren. Diese Klasse enthält eine für alles folgende wichtige Unterklasse $\mathfrak{K}^+$ der *monoton wachsenden Operatoren*. Der Operator[1] $\Omega \in \mathfrak{K}$ gehört zur Klasse $\mathfrak{K}^+$, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt:

Sind die Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\bar{\varphi}(x, y)$ aus $C^0(R)$ und genügen sie für einen in R gelegenen Punkt (x_0, y_0) der Ungleichung

$$\varphi(x, y) \leqq \bar{\varphi}(x, y) \quad \textit{in} \quad r(x_0, y_0)$$

so ist

$$\Omega\varphi \leqq \Omega\bar{\varphi} \quad \textit{an der Stelle} \quad (x_0, y_0).$$

Zur Klasse $\mathfrak{K}$ gehört z.B. der Operator

$$K\varphi = \iint\limits_{r(x,y)} k\big(x, y, s, t, \varphi(s, t)\big)\, ds\, dt,$$

---

[1] Meist werden Operatoren der Klasse $\mathfrak{K}$ mit K, Operatoren der Klasse $\mathfrak{K}^+$ mit Ω bezeichnet.

wenn die Funktion $k(x, y, s, t, z)$ stetig ist; ist k außerdem schwach monoton wachsend in der letzten Veränderlichen, so ist $K \in \mathfrak{K}^+$. Ein anderes Beispiel für einen monoton wachsenden Operator ist

$$\Omega\varphi = \int_{\bar{y}(x)}^{y} \varphi(x, t)\, dt.$$

3. Die beiden Hauptsätze

Es werden nun zwei allgemeine Sätze A und B über Operatoren bewiesen. Sie bilden die Grundlage für alle im weiteren Verlauf abzuleitenden Ungleichungen und Abschätzungen, welche Volterrasche Integralgleichungen und hyperbolische Differentialgleichungen in zwei Veränderlichen betreffen.

Satz A. *Es seien $v(x, y)$ und $w(x, y)$ Funktionen aus $C^0(R)$, $\eta(x, y)$ eine in R erklärte Funktion und $\Omega \in \mathfrak{K}^+$ ein monoton wachsender Operator. Für diese gelte*

(2) $$v \leqq \eta + \Omega v, \qquad w > \eta + \Omega w \quad \textit{in } R$$

(3) $$v < w \quad \textit{auf } C.$$

Dann ist

$$v < w \quad \textit{in } R.$$

Hat der Operator Ω die Eigenschaft, daß (für alle stetigen Funktionen φ) $\Omega\varphi = 0$ auf C ist, so ist die Voraussetzung (3) entbehrlich (sie folgt dann aus (2)).

Nehmen wir für den Beweis an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es, da $v < w$ auf C ist, einen Punkt $(x_0, y_0) \in R$ derart, daß $v = w$ in Punkt (x_0, y_0) und $v \leqq w$ in $r(x_0, y_0)$ ist. Da Ω ein monoton wachsender Operator ist, ist dann $\Omega v \leqq \Omega w$ an der Stelle (x_0, y_0). Für diese Stelle (x_0, y_0) gilt nach (2)

$$v \leqq \eta + \Omega v \leqq \eta + \Omega w < w.$$

Damit ist ein Widerspruch zur obigen Annahme $v(x_0, y_0) = w(x_0, y_0)$ erreicht worden, der die Richtigkeit von Satz A erhärtet.

Aus dem Beweis geht übrigens hervor, daß die Voraussetzung (2) von Satz A auch in

(2*) $$v < \eta + \Omega v, \qquad w \geqq \eta + \Omega w \quad \text{in } R$$

abgeändert werden kann.

Satz B. *Zwischen den Operatoren $K \in \mathfrak{K}$, $\Omega \in \mathfrak{K}^+$, den Funktionen $u, v, \varrho \in C^0(R)$ und den in R erklärten Funktionen $\eta(x, y)$ und $d(x, y)$ mögen die folgenden Beziehungen*

(4) $$u = \eta + Ku, \qquad |v - \eta - Kv| \leqq d \quad \textit{in } R$$

(5) $$|u - v| < \varrho \quad \textit{auf } C$$

(6) $$|K\varphi - K\bar{\varphi}| \leqq \Omega(|\varphi - \bar{\varphi}|) \quad \textit{für beliebige } \varphi, \bar{\varphi} \in C^0(R),$$

(7) $$\varrho > d + \Omega\varrho \quad \textit{in } R$$

bestehen. Dann ist

$$|u - v| < \varrho \quad \textit{in } R.$$

Die Voraussetzung (5) *ist wieder überflüssig, wenn* $K\varphi$ *und* $\Omega\varphi$ *(für beliebige stetige Funktion* φ*) auf* C *verschwinden; sie folgt dann aus* (4) *und* (7).

Dieser Satz läßt sich sehr einfach auf Satz A zurückführen, indem wir dort v durch $|u-v|$, w durch ϱ und η durch d ersetzen. Bei dieser Ersetzung wird die Voraussetzung (3) mit (5), der zweite Teil der Voraussetzung (2) mit (7) identisch. Es bleibt also lediglich noch zu zeigen, daß $|v-u|\leqq d+\Omega(|v-u|)$ ist. Der Nachweis wird mit (4) und (6) geführt:

$$|v-u|=|v-\eta-Kv+Kv-Ku|\leqq d+|Kv-Ku|\leqq d+\Omega(|v-u|).$$

Bei den Anwendungen von Satz A liegt meist folgende Situation vor. Es ist eine Operatorengleichung $u=\eta+\Omega u$, etwa ein Anfangswertproblem für eine hyperbolische Differentialgleichung, gegeben, und die Aufgabe besteht darin, obere und untere Schranken für die Lösung u anzugeben. Man hat dann eine Funktion w zu bestimmen, für die $w>\eta+\Omega w$ (und eventuell $w>u$ auf C, vgl. die Bemerkung am Schluß von Satz A) ist. Nun ist es möglich, Satz A auf die Funktionen u (statt v) und w anzuwenden; so ergibt sich $u<w$. Ist man an unteren Schranken interessiert, so hat man entsprechend vorzugehen.

Hat man also zwei Funktionen $v, w\in C^0(R)$ *bestimmt, für die*

$$v<\eta+\Omega v,\qquad w>\eta+\Omega w \quad \textit{in } R \tag{8}$$

(sowie, falls Ω *nicht die Eigenschaft „*$\Omega\varphi=0$ *auf* C*" besitzt,* $v<u<w$ *auf* C*) ist, so gilt*

$$v<u<w \quad \textit{in } R \tag{9}$$

für jede Lösung der Operatorengleichung $u=\eta+\Omega u$.

In Übertragung einer von Perron [*1*] stammenden, bei gewöhnlichen und elliptischen Differentialgleichungen wohlbekannten Begriffsbildung nennen wir v eine *Unterfunktion*, w eine *Oberfunktion*. Es sei daran erinnert, daß diesen Betrachtungen die einschneidende Voraussetzung zugrunde liegt, daß Ω ein monoton wachsender Operator ist. Für die Anfangswertprobleme der hyperbolischen Differentialgleichung $u_{xy}=f(x, y, u)$ bedeutet das: Der Begriff der Ober- und Unterfunktion kann nur für solche rechte Seiten $f(x, y, z)$ eingeführt werden, die in z schwach monoton wachsend sind.

Gehen wir, um diese Situation zu beleuchten, kurz auf die analogen Verhältnisse bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ein. Wir betrachten das Anfangswertproblem $y'=f(x, y)$ für $0\leqq x\leqq a$, $y(0)=y_0$. Ist für zwei differenzierbare Funktionen v, w

$$v'<f(x,v),\qquad w'>f(x,w)\quad \text{für}\quad 0<x\leqq a$$

und $v(0)<y_0<w(0)$, so ist $v<y<w$ für jede Lösung $y(x)$ des Problems. Dabei sind keinerlei Monotonievoraussetzungen über f notwendig. Anders liegen die Dinge, wenn man von der entsprechenden Integralgleichung $y(x)=y_0+\int\limits_0^x f(t, y(t))\,dt$ ausgeht. Wir betrachten jetzt Lösungen des Anfangswertproblems im Sinne von Carathéodory, d.h. totalstetige Funktionen $y(x)$, welche dieser Integralgleichung (oder, was dasselbe ist, der Anfangsbedingung $y(0)=y_0$ und fast überall

der Gleichung $y'=f(x, y)$) genügen. Es gilt dann: Sind die Funktionen v, w totalstetig und genügen sie der Voraussetzung

$$v(x) < y_0 + \int_0^x f(t, v)\, dt, \quad w(x) > y_0 + \int_0^x f(t, w)\, dt \quad \text{in} \quad 0 \leqq x \leqq a$$

oder der (stärkeren) Voraussetzung

$$v(0) < y_0 < w(0), \quad v' \leqq f(x, v), \quad w' \geqq f(t, w) \quad \text{f.ü.}^2 \text{ in } 0 \leqq x \leqq a,$$

so ist $v<y<w$, *falls die Funktion $f(x, z)$ in der Variablen z monoton wächst.* Anhand einfacher Beispiele läßt sich zeigen, daß diese Monotonievoraussetzung notwendig ist. Bei dem in der vorliegenden Arbeit eingeschlagenen Weg zur Behandlung hyperbolischer Differentialgleichungen wird ebenfalls von der entsprechenden Integralgleichung ausgegangen. Eine Monotonievoraussetzung erscheint deshalb unumgänglich.

Der Satz B hingegen ist für Operatorengleichungen $u=\eta+Ku$ mit beliebigem Operator $K \in \mathfrak{K}$ gültig. Der monotone Operator Ω tritt hier in der Voraussetzung (6) als Schranke für den Operator K auf. Meist wird Satz B in folgender Weise angewandt. Man versucht, um den Verlauf der unbekannten Lösung u kennenzulernen, eine „Näherungslösung" v zu bestimmen, die einen möglichst kleinen „Defekt" $v-\eta-Kv$ besitzt (vgl. (4)), und die sich den auf C vorgegebenen Anfangswerten möglichst gut anpaßt (vgl. (5)). Die Schranke ϱ für die Differenz $v-u$ bestimmt sich aus der Größe des Defektes und der Abschätzung von K durch den monotonen Operator Ω.

4. Anwendung auf Integralgleichungen

Durch Spezialisierung der beiden allgemeinen Sätze der vorigen Nummer auf gewisse Integraloperatoren ergeben sich eine Reihe von Resultaten über nichtlineare Volterrasche Integralgleichungen in zwei unabhängigen Veränderlichen. Die in Rede stehenden Integraloperatoren K und Ω sind gegeben durch

$$K\varphi = \iint_{r(x,y)} k(x, y, s, t, \varphi(s, t))\, ds\, dt, \tag{10}$$

$$\Omega\varphi = \iint_{r(x,y)} \omega(x, y, x, t, \varphi(s, t))\, ds\, dt. \tag{11}$$

Die „Kerne" $k(x, y, s, t, z)$ und $\omega(x, y, s, t, z)$ seien auf dem topologischen Produkt $R \times R \times \{-\infty < z < \infty\}$ erklärt, ω sei außerdem schwach monoton wachsend in der letzten Variablen. Ferner sollen sie solche Regularitätseigenschaften besitzen, daß für eine beliebige Funktion $\varphi \in C^0(R)$ die Integrale (10) und (11) existieren und daß die Funktionen $K\varphi$, $\Omega\varphi$ in R stetig sind und auf C verschwinden[3]. Diese Voraussetzung fassen wir zu $k \in \mathfrak{L}$, $\omega \in \mathfrak{L}^+$ zusammen; aus ihnen folgt $K \in \mathfrak{K}$, $\Omega \in \mathfrak{K}^+$. Es ist nicht schwierig, hinreichende Kriterien dafür anzugeben, daß $k \in \mathfrak{L}$ ist. Das ist z.B. der Fall, wenn $k(x, y, s, t, z)$ auf dem ganzen Definitionsbereich stetig ist. Eine schwächere Voraussetzung lautet: k sei für festes $(s, t) \in R$ in (x, y) und z stetig, für festes $(x, y) \in R$ und festes z in (s, t) meßbar, und zu

[2] f.ü. = fast überall.

[3] Letzteres ist nicht selbstverständlich; man denke etwa an den durch $k(x,y,s,t,z) = z/r(x, y)$ definierten Mittelwert-Operator.

jedem $M > 0$ gebe es eine Funktion $H(s,t) \in L(R)$, so daß

$$|k(x,y,s,t,z)| \leqq H(s,t) \quad \text{für} \quad (x,y) \in R, \qquad |z| < M$$

ist. Offenbar gilt dann ebenfalls $k \in \mathfrak{L}$. Nun gibt es eine wichtige Klasse von Kernen, die sog. Differenzkerne, für die auch dieses Kriterium nicht sehr brauchbar ist. Ist $k(x,y,s,t,z) = k_1(x-s, y-t, z)$ ein Differenzkern und wird $k_1(x,y,z)$ an einer Stelle $(x_0, y_0) \in R$ unendlich, so versagt das oben angeführte Kriterium. Bei Volterra-Integralgleichungen in *einer* Variablen ist die klassische Abelsche Integralgleichung von dieser Art; der zugehörige Kern lautet $k(x,s,z) = z/\sqrt{x-s}$. Das folgende Kriterium für Differenzkerne wird wohl in den meisten Fällen ausreichen. Ein Differenzkern $k(x,y,s,t,z) = k_1(x-s, y-t, z)$ ist aus $\mathfrak{L}$, wenn $k_1(x,y,z)$ stetig in z für festes $(x,y) \in R$ und meßbar in (x,y) für festes z ist und wenn zu jeder positiven Konstanten M eine Funktion $H(x,y) \in L(R)$ existiert, derart daß

$$|k_1(x,y,z)| \leqq H(x,y) \quad \text{für alle } z \text{ mit} \quad |z| < M$$

ist.

Die beiden durch (10) und (11) gegebenen Integraloperatoren K und Ω haben die am Ende von Satz A und Satz B genannte Eigenschaft. Deshalb werden diese beiden Sätze hier besonders einfach.

A. *Ist*

$$(12)\qquad \begin{aligned} v(x,y) &\leqq \eta(x,y) + \iint_{r(x,y)} \omega(x,y,s,t,v)\,ds\,dt \\ w(x,y) &> \eta(x,y) + \iint_{r(x,y)} \omega(x,y,s,t,w)\,ds\,dt \end{aligned}$$

in R, so gilt

$$v < w \quad \textit{in } R.$$

Hierbei ist Voraussetzung, daß $v, w \in C^0(R)$, η in R erklärt und $\omega \in \mathfrak{L}^+$ ist.

B. *Es sei $u \in C^0(R)$ eine Lösung, $v \in C^0(R)$ eine Näherungslösung der zu* (10) *gehörigen Integralgleichung; es gelte also in R*

$$(13)\qquad \begin{aligned} &u(x,y) = \eta(x,y) + \iint_{r(x,y)} k(x,y,s,t,u)\,ds\,dt \\ &\left|v(x,y) - \eta(x,y) - \iint_{r(x,y)} k(x,y,s,t,v)\,ds\,dt\right| \leqq d(x,y). \end{aligned}$$

Ferner sei $k \in \mathfrak{L}$, $\omega \in \mathfrak{L}^+$, und es sei

$$(14)\qquad |k(x,y,s,t,z) - k(x,y,s,t,\bar{z})| \leqq \omega(x,y,s,t,|z-\bar{z}|)$$

für beliebige $z, \bar{z}$ und $(x,y,s,t) \in R \times R$. Die Funktion $\varrho \in C^0(R)$ genüge der Ungleichung

$$(15)\qquad \varrho(x,y) > d(x,y) + \iint_{r(x,y)} \omega(x,y,s,t,\varrho)\,ds\,dt \quad \textit{in } R.$$

Dann ist in ganz R

$$|u - v| < \varrho.$$

Diese beiden Sätze folgen, wie gesagt, unmittelbar aus Nr. 4. Sie sind insofern von spezieller Art, als wir vorausgesetzt haben, daß die Integralgleichung in Ku linear ist. Man kann mit unserer Methode auch allgemeinere Probleme behandeln,

etwa Integralgleichungen der Gestalt

$$u = h(x, y, u, K u),$$

wobei h von vier reellen Veränderlichen abhängt. Aufgaben dieser Art werden wir indessen nicht weiter verfolgen.

5. Hyperbolische Differentialgleichungen

Wir wenden uns zunächst der speziellen hyperbolischen Differentialgleichung

$$u_{xy} = f(x, y, u) \tag{16}$$

zu, bei der auf der rechten Seite die partiellen Ableitungen u_x, u_y nicht vorkommen. Von den verschiedenen Problemen für die Gleichung (16) lassen sich das charakteristische und das nichtcharakteristische oder Cauchysche Anfangswertproblem in unsere Betrachtungen einbeziehen. Beide Probleme werden in der Literatur an vielen Stellen behandelt (etwa Kamke [3]).

Beim charakteristischen Anfangswertproblem ist der Grundbereich R das Rechteck $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$; es werden auf den Charakteristiken $x = 0$ und $y = 0$ Anfangswerte

$$u(x, 0) = \sigma(x) \qquad (0 \leqq x \leqq a), \qquad u(0, y) = \tau(y) \qquad (0 \leqq y \leqq b) \tag{17}$$

vorgeschrieben $(\sigma(0) = \tau(0))$. Beim Cauchy-Problem ist das Grundgebiet ein krummliniges Dreieck. Die Kurve C_1 läuft vom Punkt $(0, b)$ zum Punkt $(a, 0)$. Als Anfangswerte werden auf $C\,(=C_1)$ die Funktionswerte der Lösung sowie die Werte der partiellen Ableitungen u_x und u_y vorgegeben. Diese dürfen jedoch nicht willkürlich vorgeschrieben werden; vielmehr müssen sie verträglich sein mit der Tatsache, daß für jede stetige und mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktion $\varphi(x, y)$

$$\int_{C_{xy}} (\varphi_x\, ds + \varphi_y\, dt) - \int_{\bar{x}(y)}^{x} \varphi_x(s, \bar{y}(s))\, ds - \int_{\bar{y}(x)}^{y} \varphi_y(\bar{x}(t), t)\, dt - \varphi(x, \bar{y}(x)) - \varphi(\bar{x}(y), y) \tag{18}$$

ist (C_{xy} ist der in $r(x, y)$ gelegene Teil der Kurve C, das erste Integral ist also ein über dieses Kurvenstück[4] erstrecktes Kurvenintegral).

Was die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen anbelangt, so werden der Einfachheit halber nur Lösungen im klassischen Sinne betrachtet. Es wird also angenommen, daß die Lösung aus der Klasse $C^*(R)$ der mit Einschluß ihrer Ableitungen φ_x, φ_y und φ_{xy} in R stetigen Funktion φ ist.

Da die beiden Anfangswertprobleme, wie wir sehen werden, in der Form einer nichtlinearen Volterra-Integralgleichung gestellt werden können, ist es naheliegend, den Begriff der Lösung zu erweitern. Auf eine Möglichkeit der Erweiterung gehen wir kurz ein. Sie schafft einen Lösungsbegriff, der weitgehend analog zur Lösung im Sinne von Carathéodory bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist. Sie benutzt den Begriff der Totalstetigkeit für Funktionen von zwei Veränderlichen (Hobson [2], S. 346). Für totalstetige Funktionen $\varphi(x, y)$ existiert fast überall die Ableitung φ_{xy}, welche durch

$$\varphi_{xy}(x, y) = \lim_{h, k \to 0} \frac{\varphi(x+h, y+k) + \varphi(x, y) - \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y+k)}{h k}$$

[4] Die Kurve C ist „von links oben nach rechts unten" orientiert.

definiert ist. Unter einer Lösung etwa der charakteristischen Anfangswertaufgabe versteht man dann eine in R stetige und totalstetige Funktion u, welche fast überall in R der Gleichung (16) sowie der Anfangsbedingung (17) genügt. Es ist nicht schwierig, hierfür einen allgemeinen Existenzsatz, entsprechend dem Existenzsatz von CARATHÉODORY für gewöhnliche Differentialgleichungen, zu beweisen ($f(x, y, z)$ ist dabei als meßbar in (x, y) und stetig in z vorausgesetzt, und es muß eine Abschätzung $|f(x, y, z)| \leq H(x, y) \in L(R)$ bestehen). Eine Theorie der Abschätzung, insbesondere der Eindeutigkeit, kann mit den hier entwickelten Methoden angegriffen werden; doch sehen wir hier von einer Durchführung ab und begnügen uns mit diesem Hinweis.

Kehren wir zu unserem Problem zurück. Ist φ eine Funktion aus der Klasse $C^*(R)$, so gilt für $(x, y) \in R$

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, \bar{y}(x)) + \int_{\bar{y}(x)}^{y} \varphi_y(x, t)\, dt = \varphi(x, y(x)) + \int_{\bar{y}(x)}^{y} \left[\varphi_y(\bar{x}(t), t) + \int_{\bar{x}(t)}^{x} \varphi_{yx}(s, t)\, ds\right] dt.$$

Jede Funktion $\varphi \in C^*(R)$ gestattet also eine eindeutige Zerlegung

$$\varphi(x, y) = \varphi^0(x, y) + \iint_{r(x, y)} \varphi_{xy}(s, t)\, ds\, dt, \tag{19}$$

wobei

$$\varphi^0(x, y) = \varphi(x, \bar{y}(x)) - \int_{C_{xy}} \varphi_y\, dt = \varphi(\bar{x}(y), y) + \int_{C_{xy}} \varphi_x\, ds \tag{20}$$

ist (die Übereinstimmung dieser beiden Ausdrücke für φ^0 folgt aus (18); sie ergibt sich auch, wenn man bei der obigen Herleitung zuerst in x-Richtung und dann erst in y-Richtung integriert). Im Falle eines Rechtecks R hat man einfach

$$\varphi^0(x, y) = \varphi(x, 0) + \varphi(0, y) - \varphi(0, 0); \tag{21}$$

es ist in jedem Falle $\varphi^0 \in C^*(R)$ und $\varphi^0_{xy} = 0$, also φ^0 von der Gestalt $\sigma_1(x) + \tau_1(y)$. Die Formel (19) ist das zweidimensionale Analogon zu der Formel

$$y(x) = y^0 + \int_0^x y'(t)\, dt, \qquad y^0 = y(0).$$

Jedes der beiden genannten Anfangswertprobleme für die Gleichung (16) ist also auf eine Integralgleichung

$$u(x, y) = \eta(x, y) + \iint_{r(x, y)} f(s, t, u(s, t))\, ds\, dt \tag{22}$$

zurückführbar, in der $\eta(x, y) = \sigma_1(x) + \tau_1(y) \in C^*(R)$ ist. Die Funktion η ist durch die vorgegebenen Anfangswerte eindeutig bestimmt; sind diese beim charakteristischen Anfangswertproblem durch (17) gegeben, so ist $\eta = \sigma(x) + \tau(y) - \sigma(0)$ nach (21). Da die Integralgleichung (22) von der in Nr. 4 behandelten Art ist, lassen sich die beiden Sätze anwenden.

A. *Es sei*[5] $f \in \mathfrak{L}^+$, $v, w \in C^0(R)$ *und*

$$v < \eta + \iint_{r(x, y)} f(s, t, v)\, ds\, dt, \qquad w > \eta + \iint_{r(x, y)} f(s, t, w)\, ds\, dt \quad \textit{in } R, \tag{23}$$

[5] $f \in \mathfrak{L}^+$ bedeutet natürlich, daß $k(x, y, s, t, z) = f(s, t, z) \in \mathfrak{L}^+$ ist.

wobei η eine in R erklärte Funktion ist. Dann ist in R

(24) $$v < u < w$$

für jede Lösung $u \in C^0(R)$ der Integralgleichung (22).

Ist insbesondere $u, v, w \in C^*(R)$,

(25) $$v_{xy} \leqq f(x, y, v), \quad u_{xy} = f(x, y, u), \quad w_{xy} \geqq f(x, y, w) \quad \text{in } R,$$

(26) $$v^0 < u^0 < w^0 \quad \text{in } R$$

(die Funktion u^0, v^0, w^0 repräsentieren die Anfangswerte von u, v, w; sie sind gemäß (20) *definiert), so gilt ebenfalls* (24).

Man beachte, daß die Ungleichungen (26) nicht nur auf der Anfangskurve C, sondern im ganzen Bereich R gelten müssen. Liegt etwa das charakteristische Anfangswertproblem vor, und sind $\sigma(x)$ bzw. $\bar{\sigma}(x)$ die Anfangswerte von u bzw. w auf der Charakteristik $y=0$, $\tau(y)$ bzw. $\bar{\tau}(y)$ die Anfangswerte auf der Charakteristik $x=0$, so ist $u^0 = \sigma(x) + \tau(y) - \sigma(0)$ und $w^0 = \bar{\sigma}(x) + \bar{\tau}(y) - \bar{\sigma}(0)$. Es genügt dann für das Bestehen der Ungleichung $u^0 < w^0$ *nicht*, daß $\sigma < \bar{\sigma}$ und $\tau < \bar{\tau}$ ist. Gegenbeispiel:

$$a = b = 1, \quad \sigma = \tau = 0, \quad \bar{\sigma} = \tfrac{3}{2} - x, \quad \bar{\tau} = \tfrac{3}{2} - y, \quad u^0(1,1) = 0 > w^0(1,1) = -\tfrac{1}{2}.$$

Der erste Teil der Behauptung A ist ein Spezialfall von Nr. 5, der zweite Teil läßt sich sofort auf den ersten Teil zurückführen ($\eta = u^0$).

B. *Die Funktion $f \in \mathfrak{L}$ lasse sich gemäß*

(27) $$|f(x, y, z) - f(x, y, \bar{z})| \leqq \omega(x, y, |z - \bar{z}|) \quad \text{für} \quad (x, y) \in R, \quad z, \bar{z} \text{ beliebig}$$

durch eine Funktion $\omega \in \mathfrak{L}^+$ abschätzen. Dann besteht, falls die Funktionen $u, v, \varrho \in C^0(R)$ im Bereich R den Relationen

(28) $$u = \eta + \iint_r f(s, t, u)\, ds\, dt, \qquad \left| v - \eta - \iint_r f(s, t, v)\, ds\, dt \right| \leqq d(x, y)$$

(29) $$\varrho > d + \iint_r \omega(s, t, \varrho)\, ds\, dt$$

genügen, die Abschätzung

(30) $$|u - v| < \varrho \quad \text{in } R.$$

Sind insbesondere die Funktionen $u, v, \varrho \in C^*(R)$ und ist (mit einer Funktion $\delta(x, y) \in L(R)$)

(31) $$u_{xy} = f(x, y, u), \quad |v_{xy} - f(x, y, v)| \leqq \delta(x, y) \quad \text{in } R,$$

(32) $$\varrho_{xy} \geqq \omega(x, y, \varrho) + \delta(x, y) \quad \text{in } R,$$

(33) $$|u^0 - v^0| < \varrho^0 \quad \text{in } R,$$

so gilt wieder die Abschätzung (30).

Der erste Teil von B ist wieder in der entsprechenden Aussage von Nr. 4 enthalten. Der zweite Teil ergibt sich so: es ist

$$\left| v - u^0 - \iint_r f(s, t, v)\, ds\, dt \right| \leqq |u^0 - v^0| + \left| v - v^0 - \iint_r f(s, t, v)\, ds\, dt \right|$$
$$\leqq |u^0 - v^0| + \iint_r |v_{xy} - f(s, t, v)|\, ds\, dt \leqq |u^0 - v^0| + \iint_r \delta(s, t)\, ds\, dt.$$

Setzen wir $u^0 = \eta$ und $|u^0 - v^0| + \iint_r \delta\, ds\, dt = d$, so gilt (28). Weiterhin ist

$$\varrho = \varrho^0 + \iint_r \varrho_{xy}\, ds\, dt > |u^0 - v^0| + \iint_r (\delta + \omega(s, t, \varrho))\, ds\, dt,$$

womit auch (29) nachgewiesen ist. Also gilt in der Tat die Behauptung (30).

Bezüglich der Voraussetzung (33) ist eine ähnliche Bemerkung wie bei Satz A am Platze. Hat beim charakteristischen Anfangswertproblem die Funktion u die Anfangswerte $\sigma(x)$, $\tau(y)$ (auf $y=0$ bzw. $x=0$), die Funktion v die Anfangswerte $\bar{\sigma}(x)$, $\bar{\tau}(y)$ und ist $|\sigma - \bar{\sigma}| \leqq \varepsilon$, $|\tau - \bar{\tau}| \leqq \varepsilon$, so kann man lediglich behaupten, daß $|u^0 - v^0| \leqq 3\varepsilon$ ist. Weiter beachte man, daß für die Schrankenfunktion ϱ in (29) ein echtes $>$-Zeichen gefordert wird, während in (32), jedoch nicht in (33), das $=$-Zeichen zugelassen ist. Man könnte den Satz auch so formulieren, daß an allen drei Stellen das $\geqq$-Zeichen erlaubt ist. Allerdings würde man dann Maximalintegrale benötigen, ähnlich wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Insbesondere kann man zeigen:

Ist $f(x, y, z) \in \mathfrak{L}^+$ stetig in $R \times \{-\infty < z < \infty\}$ und so beschaffen, daß höchstens eine Lösung der Gleichung (22) *existiert, so bleibt A richtig, wenn man überall die Zeichen $<, >$ durch $\leqq, \geqq$ ersetzt. Ebenso kann in B das Gleichheitszeichen in* (29), (30), (33) *hinzugesetzt werden, wenn $\omega \in \mathfrak{L}^+$ die beiden genannten Voraussetzungen der Stetigkeit und Eindeutigkeit erfüllt.*

6. Die Lipschitz-Abschätzung

Von großem Interesse im Hinblick auf die Anwendungen ist der Fall, daß die rechte Seite $f(x, y, z)$ der Differentialgleichung (16) eine Lipschitz-Abschätzung

$$(34) \qquad |f(x, y, z) - f(x, y, \bar{z})| \leqq k(x, y)\, |z - \bar{z}|$$

für $(x, y) \in R$ und beliebige z, $\bar{z}$ zuläßt. Man kann dann, wie aus Nr. 5 B folgt, Schrankenfunktionen ϱ als Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$(35) \qquad \varrho_{xy} = k(x, y)\, \varrho + \delta(x, y)$$

bestimmen. Wir betrachten etwas allgemeiner die Integralgleichung

$$(36) \qquad \varrho(x, y) = d(x, y) + \iint_{r(x, y)} k(s, t)\, \varrho(s, t)\, ds\, dt$$

und setzen dabei $d \in C^0(R)$, $k \in L(R)$ voraus. Die Lösung lautet

$$(37) \qquad \varrho(x, y) = d(x, y) + \iint_{r(x, y)} k(s, t)\, d(s, t)\, \psi(x, y; s, t)\, ds\, dt,$$

wobei ψ die zur Gleichung (35) gehörende Riemannsche Funktion ist. Sie wird, wie man am einfachsten mit Hilfe sukzessiver Approximation beweist, gegeben durch

$$(38) \qquad \psi(x, y; s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x, y; s, t)$$

mit

$$k_1 = 1, \qquad k_{n+1}(x, y; s, t) = \int_s^x \int_t^y k(\xi, \eta)\, k_n(\xi, \eta; s, t)\, d\xi\, d\eta$$

und hat die Eigenschaften $\psi(x, y; x, t) = \psi(x, y; s, y) = 1$ und

$$\psi_{st}(x, y; s, t) = k(s, t)\,\psi(x, y; s, t). \tag{39}$$

Durch zweimalige partielle Integration erhält man aus (37) — allerdings nur unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen bezüglich d, etwa für $d \in C^*(R)$ — die wohlbekannte Formel

$$\begin{aligned} 2\varrho(x, y) &= d(\bar{x}(y), y) + d(x, \bar{y}(x)) + \\ &+ \int_{C_{xy}} [(\psi d_s - \psi_s d)\,ds - (\psi d_t - \psi_t d)\,dt] + 2 \iint_{r(x,y)} d_{st}\psi\,ds\,dt \end{aligned} \tag{40}$$

(die beiden ersten Argumente von ψ lauten überall x, y). Für das charakteristische Anfangswertproblem läßt sich ϱ in die einfachere Gestalt

$$\begin{aligned} \varrho(x, y) &= \psi(x, y; 0, 0)\,d(0, 0) + \int_0^x \psi(x, y; s, 0)\,d_s(s, 0)\,ds + \\ &+ \int_0^y \psi(x, y; 0, t)\,d_t(0, t)\,dt + \int_0^x \int_0^y \psi(x, y; s, t)\,d_{st}(s, t)\,ds\,dt \end{aligned} \tag{41}$$

bringen.

Es sei $u \in C^*(R)$ eine Lösung und $v \in C^*(R)$ eine Näherungslösung der Differentialgleichung (16). *Für die letztere gelte*

$$|v_{xy} - f(x, y, v)| \leqq \delta(x, y) \quad \textit{und} \quad |v^0 - u^0| \leqq \varepsilon(x, y) \quad \textit{in } R, \tag{42}$$

wobei $\delta(x, y) \in L(R)$, $\varepsilon(x, y) \in C^0(R)$ ist. Die Funktion $f(x, y, z)$ gestatte die Abschätzung (34). *Dann wird durch* (37) *(und damit auch durch* (40) *bzw.* (41), *falls $d \in C^*(R)$ ist), wenn man dort für d die Funktion*

$$d(x, y) = \varepsilon(x, y) + \iint_{r(x,y)} \delta(s, t)\,ds\,dt \tag{43}$$

einsetzt, eine Schranke ϱ für die Differenz $v - u$ geliefert:

$$|v - u| \leqq \varrho \quad \textit{in } R.$$

Diese Behauptung beweisen wir, indem wir sie auf Nr. 5 B mit $\omega(x, y, z) = k(x, y)z$ zurückführen. Dabei tritt eine kleine Schwierigkeit auf, weil die Funktion ϱ in (29) einer Ungleichung, hier aber der entsprechenden Gleichung genügt. Sie macht folgende zusätzliche Überlegung notwendig. Bezeichnen wir mit ϱ_n die Funktion, die sich gemäß (37) ergibt, wenn dort statt d die Funktion $d + 1/n$ eingesetzt wird, so haben wir

$$\varrho_n = d + \frac{1}{n} + \iint_r \varrho_n k\,ds\,dt > d + \iint_r \varrho_n k\,ds\,dt,$$

also nach Nr. 5 B, da die Voraussetzung (29) von ϱ_n erfüllt wird, $|u - v| < \varrho_n$. Daraus ergibt sich für $n \to \infty$ die behauptete Abschätzung $|u - v| \leqq \varrho$.

In einigen Fällen läßt sich die Riemannsche Funktion geschlossen angeben (vgl. etwa SAUER [7], S. 148ff.). Wir notieren hier nur den Fall, daß

$$k(x, y) = h(x)\,l(y) \tag{44}$$

ist. Die Funktionen $h(x)$ und $l(y)$ seien nichtnegativ und über $(0, a)$ bzw. $(0, b)$ summierbar; ihre Stammfunktionen werden mit

$$(45) \qquad H(x) = \int_0^x h(s)\,ds, \qquad L(y) = \int_0^y l(t)\,dt$$

bezeichnet. Aus (38) leitet man ohne Schwierigkeit ab, daß die Riemannsche Funktion durch die Formel

$$(46) \qquad \psi(x, y; s, t) = E\left([H(x) - H(s)]\,[L(y) - L(t)]\right)$$

gegeben wird, worin E die modifizierte Bessel-Funktion 0-ter Ordnung

$$(47) \qquad E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!^2} = I_0(2\sqrt{t})$$

bedeutet.

Besonders einfach wird die Abschätzung, wenn wir k, δ und ε als konstant annehmen. Dann ist $\psi(x, y; s, t) = E\left(k(x-s)(y-t)\right)$, und die Integrale in (40) lassen sich in Sonderfällen, von denen wir zwei wichtige angeben, auswerten.

Charakteristisches Anfangswertproblem. *Ist R ein Rechteck, $u \in C^*(R)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (16), *bei der die rechte Seite f einer Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstante k*

$$(48) \qquad |f(x, y, z) - f(x, y, \bar{z})| \leqq k\,|z - \bar{z}|$$

genügt, und gilt für die Funktion $v \in C^*(R)$ mit geeigneten Konstanten δ und ε

$$(49) \qquad |v_{xy} - f(x, y, v)| \leqq \delta \quad \text{und} \quad |v^0 - u^0| \leqq \varepsilon \quad \text{in } R,$$

so besteht im ganzen Rechteck R die Abschätzung

$$(50) \qquad |u - v| \leqq E(k\,x\,y)\left(\varepsilon + \frac{\delta}{k}\right) - \frac{\delta}{k}.$$

Die Ungleichung $|u^0 - v^0| \leqq \varepsilon$ gilt nach (21) sicher dann, wenn die Werte von u und v auf den Charakteristiken $x=0$ und $y=0$ sich um höchstens $\varepsilon/3$ unterscheiden. — Im vorliegenden Fall ist $d(s, t) = \varepsilon + \delta\,s\,t$. Die beiden ersten Integrale in (41) verschwinden also, und das Gebietsintegral läßt sich auf Grund der Gleichungen (46), (47) leicht auswerten. Man erhält auf diese Weise genau die rechte Seite von (50).

Als zweites Beispiel nehmen wir das Cauchy-Problem, bei dem die Kurve C die Gerade $x+y=0$ ist (die Kurve C verläuft nicht mehr im ersten Quadranten, was aber offenbar für die ganze Theorie unwesentlich ist).

Cauchy-Problem *mit Anfangskurve $x+y=0$. Die Funktionen u, v seien aus der Klasse*[6] *$C^*(R)$, und u sei eine Lösung von* (16). *Für geeignete Konstanten k, δ, ε, ε_1 mögen die Abschätzung* (48), *die erste der Ungleichungen* (49) *sowie die Ungleichungen*[7]

$$(51) \qquad |u - v| \leqq \varepsilon \quad \text{auf } C \quad \text{und} \quad |u_x - v_x| \leqq \varepsilon_1 \quad \text{auf } C$$

[6] Unter R verstehen wir jetzt das durch die Ungleichungen $x+y \geqq 0$, $x \leqq a$, $y \leqq b$ definierte Dreieck.

[7] Die zweite Bedingung (51) kann auch durch $|u_y - v_y| \leqq \varepsilon_1$ oder allgemeiner durch $\alpha|u_x - v_x| + (1-\alpha)|u_y - v_y| \leqq \varepsilon_1$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, ersetzt werden.

gelten. Dann besteht in R die Abschätzung

$$|u-v| \leqq A\, e^{\sqrt{k}(x+y)} + B\, e^{-\sqrt{k}(x+y)} - \frac{\delta}{k} \tag{52}$$

mit

$$A = \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{\delta}{k} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{k}}\right), \qquad B = \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{\delta}{k} - \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{k}}\right). \tag{53}$$

Der Beweis kann ähnlich wie oben geführt werden, indem man die Integrale in (40) auswertet. Im vorliegenden Fall ist nach (20) $|u^0 - v^0| \leqq \varepsilon + \varepsilon_1(x+y)$, also

$$d(x, y) = \varepsilon + \varepsilon_1(x+y) + \frac{\delta}{2}(x+y)^2.$$

Aus der Formel

$$\iint\limits_{r(x,y)} \psi\, ds\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!^2} \int\limits_{-x}^{y} \int\limits_{-t}^{x} (x-s)^n (y-t)^n\, ds\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{(x+y)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

sowie ähnlichen Formeln für die Kurvenintegrale über ψ, ψ_t und ψ_s ergibt sich dann die Behauptung. Eine andere und vielleicht einfachere Art der Herleitung besteht darin, für die Schranke ϱ den Ansatz $\varrho(x, y) = \varphi(x+y)$ zu machen. Man wird dann, mit $t = x+y$, auf ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\varphi'' = k\varphi + \delta \qquad (0 \leqq t \leqq a+b), \qquad \varphi(0) = \varepsilon, \qquad \varphi'(0) = \varepsilon_1$$

geführt, dessen Lösung $\varphi(t) = \varphi(x+y)$ gleich der rechten Seite von (52) ist.

Aufgaben der eben behandelten Art werden meist in einem um 45^0 gedrehten Koordinatensystem gestellt. Wir schreiben deshalb die Formel (52) auf die Koordinaten $x+y=\xi$, $x-y=\eta$ um. Die Differentialgleichung (16) transformiert sich dann in

$$L[\bar{u}] \equiv \bar{u}_{\xi\xi} - \bar{u}_{\eta\eta} - f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}, \bar{u}\right) = 0$$

für die Funktion $u(\xi, \eta) = u(x, y)$. Die Voraussetzungen lauten jetzt

$$L[\bar{u}] = 0, \qquad |L[\bar{v}]| \leqq \delta \quad \text{in } R$$

$$|\bar{u} - \bar{v}| \leqq \varepsilon \quad \text{und} \quad |\bar{u}_\xi - \bar{v}_\xi| \leqq \varepsilon_1 \quad \text{für} \quad \xi = 0.$$

Aus ihnen folgt die Abschätzung

$$|\bar{u} - \bar{v}| \leqq A\, e^{\sqrt{k}\,\xi} + B\, e^{-\sqrt{k}\,\xi} - \frac{\delta}{k}.$$

Die Betrachtungen dieser und der vorangehenden Nummer gelten selbstverständlich auch für den Fall, daß u und v zwei Lösungen ein und derselben Gleichung sind. Sie enthalten dann quantitative Aussagen über die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten. Läßt man auch die Anfangswerte von u und v übereinstimmen, so hat man zwei Lösungen eines Anfangswertproblems und kann aus den obigen Abschätzungen Eindeutigkeitsaussagen ableiten. Auf das Eindeutigkeitsproblem sind wir an anderer Stelle [*12*] ausführlich eingegangen, weshalb wir uns hier mit der Bemerkung begnügen, daß sich alle bekannten Eindeutigkeitskriterien für die Gleichung (16) aus dem Abschätzungssatz der Nr. 5 herleiten lassen. Darin sind enthalten Übertragungen der Kriterien von

Lipschitz, Osgood, Montel, Nagumo, Kamke u.a. von gewöhnlichen auf hyperbolische Differentialgleichungen.

Wir wollen zum Schluß noch erwähnen, daß die in dieser Nummer entwickelten Formeln große Ähnlichkeit mit den entsprechenden Abschätzungsformeln für gewöhnliche Differentialgleichungen aufweisen. Besonders in die Augen fallend ist diese Übereinstimmung bei der Abschätzung (50). Ihr entspricht bei gewöhnlichen Differentialgleichungen die Abschätzung

$$|u(x) - v(x)| \leqq e^{kx}\left(\varepsilon + \frac{\delta}{k}\right) - \frac{\delta}{k}.$$

Die Voraussetzungen hierzu lauten $u' = f(x, u)$, $|v' - f(x, v)| \leqq \delta$ für $0 \leqq x \leqq a$, $|u(0) - v(0)| \leqq \varepsilon$ sowie $|f(x, z) - f(x, \bar{z})| \leqq k|z - \bar{z}|$.

7. Systeme von Integralgleichungen

Die Übertragung unserer Überlegungen auf Systeme von Differential- bzw. Integralgleichungen bietet keinerlei Schwierigkeiten. Wir beginnen mit einigen Bezeichnungen. Es sei $n \geqq 1$. Für Vektoren $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$, ... definieren wir $|\boldsymbol{u}|$ durch

$$|\boldsymbol{u}| = (|u_1|, \dots, |u_n|)$$

und Ungleichungen $\boldsymbol{u} < \boldsymbol{v}$ durch die Festsetzung, daß $\boldsymbol{u} < \boldsymbol{v}$ gleichbedeutend mit $u_i < v_i$ für $i = 1, \dots, n$ ist (entsprechendes gilt für $\leqq, >, \geqq$). Die Größe $|\boldsymbol{u}|$ ist also kein Skalar, sondern ein Vektor. Sind die Komponenten von $\boldsymbol{u}$ Funktionen, so sollen Ausdrücke wie $\boldsymbol{u} \in C_n^0(R)$, $\boldsymbol{u} \in L_n(R)$ besagen, daß alle Komponenten u_i in der entsprechenden Funktionenklasse liegen. Die Klasse $\mathfrak{K}_n$ wird von denjenigen Operatoren $\boldsymbol{K}$ gebildet, welche den Raum $C_n^0(R)$ in sich abbilden. Die Unterklasse $\mathfrak{K}_n^+$ der monoton wachsenden Operatoren $\boldsymbol{\Omega}$ ist genau wie früher charakterisiert durch die Eigenschaft:

Aus $\boldsymbol{\varphi} \leqq \overline{\boldsymbol{\varphi}}$ *in* $r(x_0, y_0)$ *folgt* $\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\varphi} \leqq \boldsymbol{\Omega}\overline{\boldsymbol{\varphi}}$ *an der Stelle* (x_0, y_0).

Hierbei ist natürlich $\boldsymbol{\varphi}, \overline{\boldsymbol{\varphi}} \in C_n^0(R)$ vorausgesetzt.

Sind z.B. die Komponenten k_i des Vektors $\boldsymbol{k}$ Funktionen $k_i(x, y, s, t, z_1, \dots, z_n) = k_i(x, y, s, t, \boldsymbol{z})$, so wird unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen durch

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi} = \iint\limits_{r(x,y)} \boldsymbol{k}(x, y, s, t, \boldsymbol{\varphi})\, ds\, dt \tag{54}$$

ein Operator $\boldsymbol{K} \in \mathfrak{K}_n$ erklärt. Sind alle k_i in allen Variablen z_j $(1 \leqq i, j \leqq n)$ schwach monoton wachsend, so ist $\boldsymbol{K} \in \mathfrak{K}_n^+$.

Die beiden Hauptsätze von Nr. 3 bleiben ohne irgendwelche Änderungen auch für Systeme erhalten. Es seien $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}$ Funktionen aus der Klasse $C_n^0(R)$, $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{d}$ in R erklärte Funktionen sowie $\boldsymbol{K}$ ein Operator aus der Klasse $\mathfrak{K}_n$, $\boldsymbol{\Omega} \in \mathfrak{K}_n^+$ ein monoton wachsender Operator.

A. *Aus*

$$\boldsymbol{v} \leqq \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{w} > \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{w} \quad \textit{in } R, \tag{2'}$$

$$\boldsymbol{v} < \boldsymbol{w} \quad \textit{auf } C \tag{3'}$$

folgt

$$\boldsymbol{v} < \boldsymbol{w} \quad \textit{in } R.$$

B. *Aus*

(4′) $$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}, \qquad |\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}|\leqq \boldsymbol{d} \quad \text{in } R,$$

(5′) $$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|\leqq \boldsymbol{\rho} \quad \text{auf } C,$$

(6′) $$|\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{K}\overline{\boldsymbol{\varphi}}|\leqq \boldsymbol{\Omega}(|\boldsymbol{\varphi}-\overline{\boldsymbol{\varphi}}|) \quad \text{für beliebige } \boldsymbol{\varphi}, \overline{\boldsymbol{\varphi}}\in C_n^0 R),$$

(7′) $$\boldsymbol{\rho}>\boldsymbol{d}+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\rho} \quad \text{in } R$$

folgt
$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|<\boldsymbol{\rho} \quad \text{in } R.$$

Gelten auf der Anfangskurve C die Beziehungen[8] $\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$ *für beliebige stetige Funktionen* $\boldsymbol{\varphi}$, *so sind die beiden Voraussetzungen* (3′), (5′) *überflüssig.*

Die Übereinstimmung mit Nr. 3 erstreckt sich auch auf die Beweise. Nur am Anfang bei Satz A wird eine kleine Änderung notwendig. Der Punkt (x_0, y_0) ist jetzt so zu wählen, daß $\boldsymbol{v}\leqq\boldsymbol{w}$ in $r(x_0, y_0)$ ist und daß im Punkt (x_0, y_0) für mindestens eine Komponente Gleichheit $v_i(x_0, y_0)=w_i(x_0, y_0)$ herrscht.

Auf Grund dieser Übereinstimmung mit dem eindimensionalen Fall bereitet es keinerlei Schwierigkeiten, die Betrachtungen der Nr. 4 und 5 auf Systeme von Integralgleichungen
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\eta}+\iint\limits_{r(x,y)} \boldsymbol{k}(x, y, s, t, \boldsymbol{u})\, ds\, dt$$
(bzw. entsprechende Systeme mit den monoton wachsenden Kernen $\boldsymbol{\omega}(x, y, s, t, \boldsymbol{z})$) und auf Systeme von hyperbolischen Differentialgleichungen der speziellen Gestalt
$$\boldsymbol{u}_{xy}=\boldsymbol{f}(x, y, \boldsymbol{u})$$
zu übertragen. Die einzigen Änderungen an den dort formulierten Ergebnissen betreffen die Ersetzung von Skalaren durch Vektoren. Da solche Probleme in den Anwendungen selten auftreten, lassen wir es bei dieser Bemerkung bewenden und gehen in der nachfolgenden Nummer auf einen anderen weit wichtigeren Sonderfall ein.

8. Die hyperbolische Differentialgleichung $u_{xy}=f(x, y, u, u_x, u_y)$

Aus den beiden allgemeinen Sätzen der vorigen Nummer lassen sich auch Aussagen über die Lösungen der Differentialgleichung

(55) $$u_{xy}=f(x, y, u, u_x, u_y)$$

(bei der alle vorkommenden Größen wieder Skalare sind) ableiten. Beide Anfangswertprobleme, sowohl das charakteristische wie auch das Cauchysche, lassen sich in ein System von drei Integralgleichungen der Form

(56) $$\begin{aligned} u_1(x, y)&=\eta(x, y)+\iint\limits_{r(x,y)} f(s, t, u_1, u_2, u_3)\, ds\, dt \\ u_2(x, y)&=\eta_x(x, y)+\int\limits_{\bar{y}(x)}^{y} f(x, t, u_1, u_2, u_3)\, dt \\ u_3(x, y)&=\eta_y(x, y)+\int\limits_{\bar{x}(y)}^{x} f(s, y, u_1, u_2, u_3)\, ds \end{aligned}$$

---

[8] $\boldsymbol{0}$ ist der Nullvektor.

überführen (es ist $u_1=u$, $u_2=u_x$, $u_3=u_y$). Die Funktion η ist wie früher von der Gestalt $\eta=\sigma_1(x)+\tau_1(y)$. Anstelle von (56) schreiben wir kurz

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{u} \tag{57}$$

und benutzen dabei die Bezeichnungen $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{\eta}=(\eta, \eta_x, \eta_y)$ sowie

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{\varphi}=\Big(\iint_{r(x,y)} f(s,t,\boldsymbol{\varphi})\,ds\,dt,\quad \int_{\bar{y}(x)}^{y} f(x,t,\boldsymbol{\varphi})\,dt,\quad \int_{\bar{x}(y)}^{x} f(s,y,\boldsymbol{\varphi})\,ds\Big). \tag{58}$$

Um Schwierigkeiten, welche mit dem eigentlichen Problem wenig zu tun haben, von vornherein aus dem Wege zu räumen, setzen wir voraus, daß die Funktion $f(x, y, z_1, z_2, z_3)$ auf der Menge $R\times\{-\infty<z_1, z_2, z_3<\infty\}$ stetig ist. Dann ist $\boldsymbol{F}\in\mathfrak{K}_3$. Ist die Funktion f in jeder der Variablen z_1, z_2, z_3 monoton wachsend, so ist $\boldsymbol{F}\in\mathfrak{K}_3^+$.

Besitzt die rechte Seite f der Gleichung (55) die zuletzt genannte Monotonieeigenschaft, so gilt für $\boldsymbol{F}$ also der Satz A von Nr. 7. Wichtig ist nun die folgende Bemerkung. Obwohl der Operator $\boldsymbol{F}$ die am Ende von Nr. 7 B genannte Eigenschaft, auf C zu verschwinden, nicht besitzt, kann die Voraussetzung (3′) weggelassen werden, da sie aus (2′) folgt. Es wird also behauptet, daß aus

$$\boldsymbol{v}\leqq\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{v},\qquad \boldsymbol{w}>\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}\quad \text{in } R \tag{59}$$

sich $\boldsymbol{v}<\boldsymbol{w}$ auf C ergibt; dabei ist $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, v_3)$, $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, w_3)\in C_3^0(R)$ vorausgesetzt.

Für die ersten Komponenten ist diese Ungleichung $v_1<w_1$ auf C sicher richtig, da die erste Komponente von $\boldsymbol{F}\boldsymbol{\varphi}$ auf C verschwindet. Aus demselben Grunde gilt $v_2<w_2$ auf jenem Teil von C, auf dem die zweite Komponente von $\boldsymbol{F}\boldsymbol{\varphi}$ verschwindet, das ist also auf der Punktmenge $\{(x,y(x))\mid 0\leqq x\leqq a\}$. Ebenso ist $v_3<w_3$ auf $\{(x(y), y)\mid 0\leqq y\leqq b\}$. Nehmen wir nun an, es sei nicht $v_2<w_2$ auf ganz C. Dann gibt es auf dem Geradenstück $\{(0, y)\mid b_0\leqq y\leqq b\}$ eine erste Stelle $y_0>b_0$, an der $v_2=w_2$ ist (man beachte $v_2(0, b_0)<w_2(0, b_0)$). Auf dem zwischen b_0 und y_0 gelegenen Stück der y-Achse ist dann $\boldsymbol{v}\leqq\boldsymbol{w}$ und deshalb [mit $b_0=\bar{y}(0)$]

$$\int_{b_0}^{y_0} f(0,t,\boldsymbol{v})\,dt\leqq\int_{b_0}^{y_0} f(0,t,\boldsymbol{w})\,dt.$$

Hieraus und aus (59) folgt aber $v_2(0, y_0)<w_2(0, y_0)$ im Widerspruch zur oben gemachten Annahme $v_2(0, y_0)=w_2(0, y_0)$. Es ist also in der Tat $v_2<w_2$ auf C und, wie man in gleicher Weise zeigt, $v_3<w_3$ auf C.

A. *Die Funktion $f(x, y, z_1, z_2, z_3)$ sei auf der Menge $R\times\{-\infty<z_1, z_2, z_3<\infty\}$ stetig und monoton wachsend in den drei letzten Veränderlichen. Für die Vektorfunktionen $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\in C_3^0(R)$ gelte*[9]

$$\boldsymbol{v}<\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{v},\qquad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{u},\qquad \boldsymbol{w}>\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}\quad \textit{in } R. \tag{60}$$

Dann ist

$$\boldsymbol{v}<\boldsymbol{u}<\boldsymbol{w}\quad \textit{in } R. \tag{61}$$

[9] Man beachte, daß es sich im folgenden jeweils um drei skalare Ungleichungen handelt.

Für die Anwendung auf Differentialgleichungen ist folgende Fassung oft bequemer. Die skalaren Funktionen u, v, w *seien aus der Klasse* $C^*(R)$, *und es sei*

$$(62)\quad v_{xy} \leqq f(x, y, v, v_x, v_y), \quad u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad w_{xy} \geqq f(x, y, w, w_x, w_y).$$

Für die Anfangswerte dieser Funktionen gelte

$$(63)\quad \begin{aligned} v < u < w \quad & \textit{auf der Menge} \quad \{(x, \bar{y}(x)) \mid 0 \leqq x \leqq a_0\} \\ v_x < u_x < w_x \quad & \textit{auf der Menge} \quad \{(x, \bar{y}(x)) \mid 0 \leqq x \leqq a\} \\ v_y < u_y < w_y \quad & \textit{auf der Menge} \quad \{(\bar{x}(y), y) \mid 0 \leqq y \leqq b\}. \end{aligned}$$

Dann ist in R

$$(64)\quad v < u < w, \quad v_x < u_x < w_x, \quad v_y < u_y < w_y.$$

Die Anfangsbedingung (63) lautet im Falle des charakteristischen Anfangswertproblems

$$v(0,0) < u(0,0) < w(0,0), \quad v_x(x,0) < u_x(x,0) < w_x(x,0) \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq a$$
$$v_y(0,y) < u_y(0,y) < w_y(0,y) \quad \text{für} \quad 0 \leqq y \leqq b,$$

im Falle des Cauchy-Problems

$$v < u < w, \quad v_x < u_x < w_x, \quad v_y < u_y < w_y \quad \text{auf } C.$$

Der erste Teil von A folgt direkt aus Nr. 7 A, da die Voraussetzung (3′), wie oben gezeigt wurde, überflüssig ist. Der zweite Teil läßt sich mit Hilfe der Darstellung (19), (20) leicht auf den ersten zurückführen. Dabei muß nachgewiesen werden, daß im ganzen Bereich R

$$v^0 < u^0 < w^0, \quad v_x^0 < u_x^0 < w_x^0, \quad v_y^0 < u_y^0 < w_y^0$$

ist. Es ist nicht schwierig und soll dem Leser überlassen werden, diese drei Ungleichungen aus der Voraussetzung (63) abzuleiten.

Die bisherigen, die Differentialgleichung (55) betreffenden Überlegungen gelten nur unter einer einschneidenden Monotonievoraussetzung bezüglich f. Für solche rechten Seiten f kann man also von *Unter- und Oberfunktionen* bezüglich eines Anfangswertproblems für die Gleichung (55) sprechen. Im allgemeinen wird f diese Monotonieeigenschaft nicht besitzen, und man muß sich dann auf den folgenden Satz B stützen.

B. *Die Funktionen* $f(x, y, z_1, z_2, z_3)$ *und* $\omega(x, y, z_1, z_2, z_3)$ *seien in*

$$R \times \{-\infty < z_i < \infty\}$$

stetig, die Funktion ω *außerdem monoton wachsend in* z_1, z_2, z_3 *und es gelte die Abschätzung*

$$(65)\quad |f(x, y, z_1, z_2, z_3) - f(x, y, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)| \leqq \omega(x, y, |z_1 - \bar{z}_1|, |z_2 - \bar{z}_2|, |z_3 - \bar{z}_3|)$$

für $(x, y) \in R$ *und beliebige* z_i, $\bar{z}_i$. *Für die Funktionen* $u, v, \varrho \in C^*(R)$ *gelte*

$$(66)\quad u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad |v_{xy} - f(x, y, v, v_x, v_y)| \leqq \delta(x, y)$$

$$(67)\quad \varrho_{xy} \geqq \omega(x, y, \varrho, \varrho_x, \varrho_y) + \delta(x, y)$$

in R sowie

$$
(68)\qquad
\begin{aligned}
&|u-v|<\varrho && \textit{auf der Menge} \quad \{(x,\bar{y}(x))\mid\ 0\leqq x\leqq a_0\}\\
&|u_x-v_x|<\varrho_x && \textit{auf der Menge} \quad \{(x,\bar{y}(x))\mid\ 0\leqq x\leqq a\}\\
&|u_y-v_y|<\varrho_y && \textit{auf der Menge} \quad \{(\bar{x}(y),y)\mid\ 0\leqq y\leqq b\}.
\end{aligned}
$$

Dann hat man im ganzen Bereich R die Abschätzung

$$
(69)\qquad |u-v|<\varrho,\qquad |u_x-v_x|<\varrho_x,\qquad |u_y-v_y|<\varrho_y.
$$

Auch dieser Satz kann, genau wie der vorangehende, auf den entsprechenden Satz von Nr. 7 zurückgeführt werden. Dabei hat man sich zu überlegen, daß die Voraussetzung (5′) aus (4′) und (7′) folgt, ebenso wie früher (3′) aus (2′) gefolgert wurde. Die Einzelheiten sollen dem Leser überlassen bleiben.

Die in (68) stehenden $<$-Zeichen sind wohl noch unbequemer als beim entsprechenden Satz von Nr. 5. Stimmen nämlich die Ableitungen von u und v auf C überein, so darf man nicht eine Funktion ϱ wählen, für die ϱ^0 konstant ist. Doch gilt auch hier die frühere Bemerkung, daß man durch einen einfachen Grenzübergang, der im wesentlichen darauf hinausläuft, für die Differentialgleichung $\varrho_{xy}=\omega(x, y, \varrho, \varrho_x, \varrho_y)$ Maximal- und Minimalintegrale zu definieren, zu Sätzen gelangen kann, bei denen Gleichheitszeichen zugelassen sind. Im besonderen gilt:

Ist die Funktion f in A bzw. die Funktion ω in B so beschaffen, daß ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz besteht (etwa Lipschitz-Bedingung bezüglich z_1, z_2, z_3), so kann man bei allen Ungleichungen in A bzw. B das Gleichheitszeichen hinzusetzen, ohne die Gültigkeit dieser Sätze zu beeinträchtigen.

9. Die Lipschitz-Bedingung

Die rechte Seite f der Gleichung (55) genüge einer Lipschitz-Bedingung

$$
(70)\quad |f(x,y,z_1,z_2,z_3)-f(x,y,\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3)|\leqq k|z_1-\bar{z}_1|+p|z_2-\bar{z}_2|+q|z_3-\bar{z}_3|,
$$

bei der k, p und q von x und y abhängende Funktionen sind. Dann läßt sich eine Schranke ϱ für die Differenz zweier Funktionen u und v, welche der Bedingung (66) genügen, als Lösung der linearen Differentialgleichung

$$
(71)\qquad \varrho_{xy}=k\,\varrho+p\,\varrho_x+q\,\varrho_y+\delta
$$

gewinnen.

Genügt ϱ dieser Differentialgleichung sowie der Anfangsbedingung (68), *so gilt die Abschätzung* (69). *Durch einen Grenzübergang, ähnlich wie in Nr.* 6, *zeigt man, daß es hinreichend ist, wenn ϱ die Ungleichungen* (68) *mit dem $\leqq$-Zeichen erfüllt. In der Behauptung* (69) *muß dann ebenfalls das $\leqq$-Zeichen zugelassen werden.*

Da die Lösungen der Gleichung (71) mit Hilfe der Riemannschen Funktion geschlossen angegeben werden können, ist es nicht schwierig, hieraus explizite Abschätzungen abzuleiten. Wir begnügen uns mit zwei Beispielen, welche auf besonders einfache Formeln führen.

Charakteristisches Anfangswertproblem. *Für geeignete Konstanten $k, p, q, \delta, \varepsilon$ mögen die Abschätzungen* (70),

$$(72)\qquad |v_{xy} - f(x, y, v, v_x, v_y)| \leqq \delta\, e^{py+qx} \quad \textit{in } R$$

$$(73)\qquad \begin{aligned} &|u(0,0) - v(0,0)| \leqq \varepsilon \\ &|u_x - v_x| \leqq \varepsilon\, q\, e^{qx} \quad \textit{für} \quad y = 0 \\ &|u_y - v_y| \leqq \varepsilon\, p\, e^{py} \quad \textit{für} \quad x = 0 \end{aligned}$$

gelten. Dann besteht, wenn u eine Lösung der Differentialgleichung (55) *ist, die Abschätzung*

$$(74)\qquad |u - v| \leqq e^{py+qx}\left[E(mxy)\left(\varepsilon + \frac{\delta}{m}\right) - \frac{\delta}{m}\right] \quad \textit{mit} \quad m = k + pq$$

(sowie entsprechende Abschätzungen für die ersten Ableitungen) in R.

Man rechnet leicht nach, daß die auf der rechten Seite von (74) stehende Funktion ϱ allen an sie gestellten Anforderungen genügt.

Cauchy-Problem *mit Anfangskurve $x + y = 0$. Für geeignete Konstanten $k, p, q, \delta, \varepsilon, \varepsilon_1$ mögen die Abschätzungen* (70),

$$(75)\qquad |v_{xy} - f(x, y, v, v_x, v_y)| \leqq \delta \quad \textit{in } R,$$

$$(76)\qquad |u - v| \leqq \varepsilon, \qquad |u_x - v_x| \leqq \varepsilon_1 \quad \textit{und} \quad |u_y - v_y| \leqq \varepsilon_1 \quad \textit{für} \quad x + y = 0$$

gelten. Dann gilt in R

$$(77)\qquad |u - v| \leqq A_1 e^{\lambda_1(x+y)} + A_2 e^{\lambda_2(x+y)} - \frac{\delta}{k}$$

mit

$$2\lambda_1 = p + q + \sqrt{(p+q)^2 + 4k}, \qquad 2\lambda_2 = p + q - \sqrt{(p+q)^2 + 4k}$$

$$\sqrt{(p+q)^2 + 4k}\, A_1 = \varepsilon_1 - \lambda_2\left(\varepsilon + \frac{\delta}{k}\right), \qquad \sqrt{(p+q)^2 + 4k}\, A_2 = \lambda_1\left(\varepsilon + \frac{\delta}{k}\right) - \varepsilon_1.$$

Macht man nämlich, wie in Nr. 6, für ϱ den Ansatz $\varrho(x, y) = \varphi(x+y)$, so ergeben sich für $\varphi(t)$ die Bedingungen

$$\varphi'' = k\varphi + (p+q)\varphi' + \delta, \qquad \varphi(0) = \varepsilon, \qquad \varphi'(0) = \varepsilon_1.$$

Die Lösung führt gerade auf die Schranke (77).

10. Ein Beispiel und Schlußbemerkungen

Wir betrachten die quasilineare Differentialgleichung

$$(78)\qquad u_{xy} = g + hu + ku(u_x + u_y),$$

worin g, h und k stetige Funktionen des Punktes $(x, y) \in R$ sind. Die bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssätze lassen sich auf diese Gleichung anwenden, wenn man sich dabei des folgenden wohlbekannten Kunstgriffes bedient. Sind $p < q$ zwei Zahlen, so bezeichnen wir mit $[u]_p^q$ die Funktion von u, welche $= p$ für $u \leqq p$, $= u$ für $p < u < q$ und $= q$ für $u \geqq q$ ist. Unter Verwendung dieser Bezeichnung ersetzt man die Gleichung (78) z. B. durch

$$(79)\qquad u_{xy} = f_1(x, y, u, u_x, u_y) = g + h[u]_p^q + k[u]_p^q\left([u_x]_p^q + [u_y]_p^q\right).$$

Man sieht sofort, daß die Funktion f_1 einer Lipschitz-Bedingung in u, u_x, u_y genügt und daß eine Lösung u der Differentialgleichung (79) auch Lösung der ursprünglichen Gleichung (78) ist, wenn p hinreichend klein und q hinreichend groß ist (genauer: solange $p \leq u, u_x, u_y \leq q$ ist). Es gilt also ein Eindeutigkeitssatz und ein Existenzsatz für die Gleichung (78) (beim letzteren muß man sich eventuell auf „kleine" Grundgebiete beschränken, da die Lösungen sehr stark anwachsen können).

Im folgenden seien g, h und k nichtnegativ, und die durch die Anfangswerte eindeutig definierte Funktion $\eta(x, y) = \sigma_1(x) + \tau_1(y)$ (vgl. (56)) habe ebenfalls die Eigenschaften $\eta \geqq 0$, $\eta_x \geqq 0$, $\eta_y \geqq 0$. Setzen wir in (79) $p = 0$, so ist die Funktion $v = 0$ eine Unterfunktion im Sinne von Nr. 8 A. [In (63) sind, da ein Existenzsatz besteht, Gleichheitszeichen zugelassen; man kann jedoch auf diese Bemerkung verzichten und statt dessen die Unterfunktionen $v = -\varepsilon(1 + x + y + xy)$, $\varepsilon > 0$ betrachten.] Die Gleichung (79) hat demnach genau eine Lösung u, und für diese gilt $u, u_x, u_y \geq 0$. Dasselbe ist dann auch für die ursprüngliche Gleichung richtig. Unter den am Anfang dieses Abschnittes eingeführten Voraussetzungen über die Koeffizienten g, h, k und die Anfangswerte kann also der Satz A von Nr. 8 angewandt werden (auch unter Zulassung von Gleichheitszeichen in (63) und (64)).

Bei der Suche nach möglichst guten Ober- und Unterfunktionen können verschiedene Wege eingeschlagen werden. Man kann etwa einfache und naheliegende Funktionsansätze, welche noch freie Parameter enthalten, machen und versuchen, die letzteren so zu bestimmen, daß den Bedingungen (62), (63) Genüge getan wird. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, mit Ansätzen der Form $v(x, y) = \varphi(x + y)$ oder $v(x, y) = \psi(xy)$ [entsprechend $w = \bar{\varphi}(x + y)$ oder $w = \bar{\psi}(xy)$] Ober- und Unterfunktionen als Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu bestimmen. Ist $0 \leqq g_1 \leqq g \leqq g_2$, $0 \leqq h_1 \leqq h \leqq h_2$, $0 \leqq k_1 \leqq k \leqq k_2$ und $t = x + y$, so ergeben sich in unserem Beispiel für $\varphi(t)$, $\bar{\varphi}(t)$ aus (62) die Ungleichungen

$$\varphi'' \leqq g_1 + h_1 \varphi + 2 k_1 \varphi \varphi', \qquad \bar{\varphi}'' \geqq g_2 + h_2 \bar{\varphi} + 2 k_2 \bar{\varphi} \bar{\varphi}'.$$

Dazu kommen dann noch Anfangsbedingungen gemäß (63) (hierbei ist zugelassen, daß $g_1, \ldots, h_2$ Funktionen von $t = x + y$ sind). In ähnlicher Weise führt der Ansatz $v = \psi(xy)$, $w = \bar{\psi}(xy)$ mit $s = xy$ auf

$$\begin{aligned} &\psi' + s\psi'' \leqq g_1 + h_1 \psi + 2\sqrt{s}\, k_1 \psi \psi', \\ &\bar{\psi}' + s\bar{\psi}'' \geqq g_2 + h_2 \bar{\psi} + \left(a + \frac{s}{a}\right) k_2 \bar{\psi} \bar{\psi}'. \end{aligned} \tag{80}$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, daß für das Grundgebiet $a = b$ gilt; es wurden die Ungleichungen

$$a + \frac{xy}{a} \leqq x + y \leqq 2\sqrt{xy} \tag{81}$$

benutzt. Eine dritte Methode empfiehlt sich besonders dann, wenn „gute" Unterfunktionen leicht, Oberfunktionen dagegen schwierig zu bestimmen sind (oder umgekehrt). Man setzt dabei, ausgehend von einer Unterfunktion v, $w = v + \varrho$ und bestimmt ϱ mit Hilfe des Defektes von v nach Satz B von Nr. 8. Wir geben unten auch dafür ein Beispiel an.

Führen wir einige dieser Ansätze an der Differentialgleichung

$$u_{xy} = 1 + u(u_x + u_y) \tag{82}$$

durch $(h=0,\ g=k=1)$! Es sei für das Quadrat $0 \leqq x,\ y \leqq a$ das charakteristische Anfangswertproblem mit Anfangswerten $\sigma(x) = \tau(y) = 0$ vorgegeben. Der wohl einfachste Ansatz $v,\ w = C\,x\,y$ erfüllt die Anfangsbedingungen (63) mit dem Gleichheitszeichen, und aus (62) wird

$$C - 1 \underset{(\leqq)}{\geqq} C^2\,x\,y\,(x+y)\,.$$

Für $C=1$ erhält man eine Unterfunktion, für $C>1$ eine Oberfunktion, das letztere jedoch nur, solange das quadratische Polynom $P(C) = C^2 s t - C + 1 \leqq 0$ ist (es war $s = xy$, $t = x + y$). Nun ist, wie man durch Lösen der entsprechenden quadratischen Gleichung leicht nachrechnet, $P(C_0) \leqq 0$ für $0 \leqq st \leqq \alpha$, wenn $C_0 = (1 - \sqrt{1-4\alpha})/2\alpha$ ist. Die Funktion $w = C_0\,x\,y$ ist also eine Oberfunktion, solange $x\,y\,(x+y) \leqq \alpha$ ist, insbesondere für $x\,y\,(x+y) = \alpha$. Wir haben also aus dem Ansatz $C\,x\,y$ zwei Schranken für die Lösung u

$$x\,y \leqq u \leqq \frac{1}{2(x+y)}\left(1 - \sqrt{1 - 4\,x\,y\,(x+y)}\right) = x\,y + x^2\,y^2\,(x+y) + \cdots \tag{83}$$

$(x,\ y \geqq 0,\ 4\,x\,y\,(x+y) \leqq 1)$ gewonnen, welche für kleine Werte von x oder y schon recht brauchbar ist $\left(0{,}0625 \leqq u\left(\tfrac14, \tfrac14\right) \leqq 0{,}0646;\ 0{,}25 \leqq u\left(\tfrac12, \tfrac12\right) \leqq 0{,}5\right)$. Man überlegt sich leicht, daß für $x\,y > 0$ in (83) an beiden Stellen das $<$-Zeichen stehen kann.

Bessere Unter- und Oberfunktionen lassen sich gemäß (80) aus

$$\begin{aligned} \psi' + s\,\psi'' &\leqq 1 + 2\sqrt{s}\,\psi\,\psi', & \psi(0) &= 0 \\ \overline{\psi}' + s\,\overline{\psi}'' &\geqq 1 + \left(a + \frac{s}{a}\right)\overline{\psi}\,\overline{\psi}', & \overline{\psi}(0) &= 0 \end{aligned}$$

gewinnen. Man erhält auf diese Weise mit wenig Mühe die Funktionen $\psi = s + 0{,}32\,s^{\frac52}$ und, wenn etwa $a = b = \frac12$ ist, $\overline{\psi} = s + 0{,}32\,s^2$, d.h.

$$xy + 0{,}32\,(x\,y)^{\frac52} < u < x\,y + 0{,}32\,(x\,y)^2. \tag{84}$$

Offenbar wird beim vorliegenden Beispiel ein Ansatz von der Form $\psi(x\,y)$ dem Sachverhalt nicht ganz gerecht, da die dann auf der rechten Seite auftretende Größe $x+y$ nicht durch $x\,y$ ausgedrückt werden kann und gemäß (81) abgeschätzt werden muß. Ein Versuch mit dem Ansatz $s\,\chi(r)$, wobei $r = st = x\,y\,(x+y)$ ist, führt auf

$$\chi + 5\,r\,\chi' + 2\,r\,\chi'' \underset{(\leqq)}{\geqq} 1 + r\,\chi^2 + r^2\,\chi\chi' + s^3\,(2\,\chi\,\chi' - \chi'') \tag{85}$$

für $\chi = \chi(r)$. Setzt man χ als Polynom 2. Grades an, so ergibt sich mit $\chi = 1 + r/6 + r^2/30$ eine Unterfunktion, mit $\chi = 1 + r/6 + 0{,}0424\,r^2$ eine Oberfunktion, letzteres für $a = b = \frac12$. Damit sind zwei Schranken gefunden, welche sich im Quadrat $0 \leqq x,\ y \leqq \frac12$ um weniger als $0{,}0006$ unterscheiden. Beim Versuch, obere Schranken für größere Quadrate aufzustellen, treten Schwierigkeiten auf. Sie haben ihren Grund im raschen Anwachsen der Lösung. Versuchen wir, um darüber näheren Aufschluß zu bekommen, einen Ansatz $\chi(r) = c/(c-r)$. Aus (85) wird dann

$$c^2\,(6-c) - 3\,c\,r + r^2 \underset{(\leqq)}{\geqq} 2\,c\,(c-1)\,\frac{s^3}{r} \qquad (0 \leqq r < c)\,.$$

Für $c=6$ ergibt sich eine Unterfunktion, für $c=3$ eine Oberfunktion (man beachte $s^3/r \leqq r/4$). Die Lösung wird also zwischen $r=3$ und $r=6$ unendlich, sie existiert sicher in einem Quadrat mit $a<\sqrt{3/2}$, jedoch nicht im Quadrat mit $a=\sqrt[3]{3}$, und sie genügt den Ungleichungen

$$\frac{6xy}{6-xy(x+y)} < u < \frac{3xy}{3-xy(x+y)}.$$

Wir geben zum Schluß ein Beispiel für die Art und Weise, wie man aus einer Unterfunktion mit Satz 8 B eine Oberfunktion ableiten kann. Kennt man bereits eine Funktion $w(x, y)$ mit der Eigenschaft $u \leqq w$, $u_x \leqq w_y$, $u_x \leqq w_y$, so darf man annehmen, daß die rechte Seite unserer Differentialgleichung einer Abschätzung (65) mit $\omega(x, y, z_1, z_2, z_3) = z_1(w_x + w_y) + w(z_2 + z_3)$ genügt (man darf dann, ähnlich wie in (79), u durch $[u]_0^w$, u_x durch $[u]_0^{w_x}$, ... ersetzen). Wir gehen, um einen ganz einfachen Fall zu betrachten, aus von der Unterfunktion $v = xy$ und setzen $w = Cxy$, $C>1$. Wir werden sehen, daß man die obere Schranke w nicht explizit anzugeben braucht, es muß nur sichergestellt sein, daß sie für kleine Werte von xy oberhalb der Lösung verläuft. Die Gleichung (67) lautet jetzt

$$\varrho_{xy} \geqq C(x+y)\varrho + Cxy(\varrho_x + \varrho_y) + xy(x+y).$$

Setzt man etwa $\varrho = A x^2 y^2$, so hat man

$$4A \geqq 3ACxy(x+y) + (x+y). \tag{86}$$

Es besteht also der folgende Sachverhalt: Solange $u \leqq w = Cxy$, $u_x \leqq w_x$, $u_y \leqq w_y$ ist, gilt auch $u \leqq v + \varrho = xy + A x^2 y^2$, $u_x \leqq v_x + \varrho_x$, $u_y \leqq v_y + \varrho_y$, wenn außerdem die Beziehung (86) besteht. Aus dieser Formulierung wird klar, daß man sich nicht von vornherein auf eine Funktion w festlegen muß. Der Gültigkeitsbereich der Ungleichungen $u \leqq w$, $u_x \leqq w_x$, $u_y \leqq w_y$ kann vielmehr zugleich mit ϱ mitbestimmt werden. Weiß man nämlich, daß diese drei Ungleichungen für kleine xy gelten, so sind sie sicher richtig, solange noch $v + \varrho < w$, $v_x + \varrho_x < w_x$, $v_y + \varrho_y < w_y$ ist. Beschränken wir uns etwa auf $0 \leqq x$, $y < \frac{1}{2}$, so sind die zuletzt genannten Ungleichungen für $1 + 2A = C$ erfüllt. Aus (86) berechnet man dann A zu $A = \frac{1}{3}(13 - \sqrt{145}) < 0{,}32$. Die auf diese Weise erhaltene obere Schranke $xy + A x^2 y^2$ ist um ein weniges besser als (84).

Wir fügen noch einige allgemeine Bemerkungen an. Das am Ende von Nr. 6 über das Eindeutigkeitsproblem Gesagte gilt entsprechend auch für die Gleichung (55). Aus dem Satz B von Nr. 8 können alle bekannten Eindeutigkeitskriterien für die Gleichung (55) hergeleitet werden; vgl. [*12*].

Einige Probleme, auf die wir nicht eingegangen sind, die sich aber mit unserer Methode behandeln lassen, seien noch genannt. Das sind zunächst die beiden Anfangswertprobleme für ein System

$$\boldsymbol{u}_{xy} = \boldsymbol{f}(x, y, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_x, \boldsymbol{u}_y).$$

Gewisse Differentialgleichungen höherer Ordnung in zwei unabhängigen Variablen, z.B. die Gleichung

$$u_{xxy} = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}),$$

können ebenfalls auf Integralgleichungen vom Volterra-Typ zurückgeführt werden. Schließlich treten bei der Ausdehnung der ganzen Theorie auf mehr als zwei unabhängige Veränderliche keinerlei neue Schwierigkeiten auf. Es ist damit möglich, etwa Differentialgleichungen der Gestalt

$$u_{xyz} = f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}), \qquad u = u(x, y, z)$$

zu behandeln.

Literatur

[1] Perron, O.: Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Math. Ann. **76**, 471–484 (1915).
[2] Hobson, E. W.: The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series. Vol. 1, 1927.
[3] Kamke, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930.
[4] Satō, T.: Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra. Compositio Math. **11**, 271–290 (1953).
[5] Kisynski, J.: Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation $s = F(x, y, z, p, q)$. Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska **11**, 73–112 (1957).
[6] Diaz, J. B.: On an analogue of the Euler-Cauchy polygon method for the numerical solution of $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. Arch. Rational Mech. Anal. **1**, 154–180 (1957).
[7] Sauer, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.
[8] Walter, W.: On the existence theorem of Carathéodory for ordinary and hyperbolic equations. Technical Note BN-172, AFOSR (1959).
[9] Walter, W.: Über die Differentialgleichung $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. Teil I–III. Math. Z. **71**, 308–324, 436–453 (1959); **73**, 268–279 (1960).
[10] Törnig, W.: Zur numerischen Behandlung von Anfangswertproblemen partieller hyperbolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen. Teil I, II. Arch. Rational Mech. Anal. **4**, 428–466 (1960).
[11] Moore, R. H.: On approximate solutions of non-linear hyperbolic partial differential equations. Arch. Rational Mech. Anal. **6**, 75–88 (1960).
[12] Walter, W.: Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen. Math. Z. **74**, 191–208 (1960).

Institut für Angewandte Mathematik
Technische Hochschule Karlsruhe

(Eingegangen am 16. Dezember 1960)

EDITORIAL BOARD

CONTENTS

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany